

## Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2011-2012 Efra stig

Nafn: \_\_\_\_\_

Kennitala: \_\_\_\_\_ Sími: \_\_\_\_\_

Heimilisfang: \_\_\_\_\_ Póstnúmer: \_\_\_\_\_

Netfang: \_\_\_\_\_

Skóli: \_\_\_\_\_ Bekkur eða áfangi: \_\_\_\_\_

Námsár í framhaldsskóla:  1.  2.  3.  4.

I	
II	
16	
17	
18	
19	
Alls	

### Leiðbeiningar:

- Opnið ekki spurningaheftið fyrr en ykkur er sagt að gera það.
- Færið inn allar upplýsingar sem beðið er um hér á undan áður en þið opnið heftið.
- Þetta er ekki venjulegt próf. Ekki er gert ráð fyrir að margir geti svarað öllum spurningunum. Þótt þið getið ekki svarað nema hluta þeirra, þá þarf það ekki að þýða að þið standið ykkur ekki vel. Sumar spurninganna eru mjög erfiðar.
- Keppnin er í þremur hlutum. Í fyrsta hluta eru tíu spurningar sem gilda þrjú stig hver; í öðrum hluta eru fimm spurningar sem gilda sex stig hver og í þriðja hluta eru fjórar spurningar sem gilda tíu stig hver. Hámarksfjöldi stiga er 100.
- Allar spurningar í fyrsta hlutanum eru krossaspurningar. Á eftir hverri spurningu eru fjögur hugsanleg svör. Aðeins eitt þeirra er rétt. Setjið kross í reitinn framan við rétta svarið. Ef þið getið ekki svarað spurningu, þá borgar sig yfirleitt ekki að giska á svarið, því að fyrir hvert rangt svar er dregið frá eitt stig.
- Í öðrum hluta á aðeins að tilgreina svör, en ekki sýna aðferðina sem notuð var. Svarið skal tilgreint á svarlínunni aftan við spurninguna. Fyrir rétt svar eru gefin sex stig, fyrir rangt svar, ófullkomið eða tvírætt svar er ekkert stig gefið.
- Í lausnum fjögurra síðustu dæmanna, í þriðja hluta, á að gera fullkomna grein fyrir hvernig svarið var fengið. Færið inn endanlega lausn, ekki krot sem á heima á rissblöðum. Við mat lausna er tekið tillit til nákvæmni í röksemdafærslu og skýrleika í framsetningu.
- Hjálparmyndir sem fylgja sumum dæmunum eru aðeins ætlaðar til skýringar. Ekki er víst að þær séu teiknaðar í réttum hlutföllum.
- Þið hafið nákvæmlega tvær og hálf klukkustund til að leysa verkefnið eftir að ykkur er leyft að byrja. **Notkun reiknivéla er óheimil.**

## Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar. Hver spurning er þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

1. Brotið  $\frac{5^1 + 5^0 + 5^{-1}}{5^{-1} + 5^{-2} + 5^{-3}}$  er jafnt

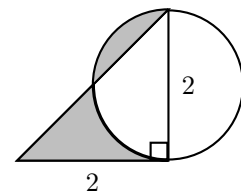
$\frac{1}{125}$

$\frac{1}{25}$

25

125

2. Myndin sýnir hring með þvermál 2 og rétthyrndan þríhyrning. Hvert er flatarmál skyggða svæðisins?



$\pi - \frac{1}{2}$

1

$\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$

3. Gefið er að  $2x + 3y = 6x - y$  og  $x + y \neq 0$ . Þá er  $\frac{7x - y}{x + y}$  jafnt og

1

2

3

4

4. Ef  $a < b < 0$  hvað af eftirfarandi er þá satt?

$a^2 < b^2$

$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

$a^3 > b^3$

$\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$

5. Ef  $(\sqrt{3})^x \cdot (\sqrt{27})^x = \sqrt{3}$  hvert er gildið á  $x$ ?

$\frac{1}{8}$

$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}$

6. Ef  $x^2 + y^2 = 20$  og  $x^2 - y^2 = 2$  hvert er gildið á  $|xy|$ ?

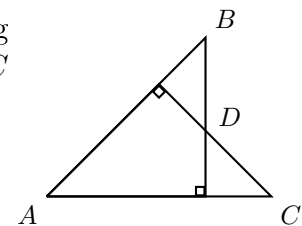
$\frac{\sqrt{418}}{2}$

5

$\frac{5\sqrt{10}}{3}$

$3\sqrt{11}$

7. Á myndinni eru hornin  $A$ ,  $B$  og  $C$  öll  $45^\circ$  og strikin  $BD$  og  $CD$  eru framlengd hornrétt á  $AC$  og  $AB$ . Hver er lengd  $BC$  í cm ef lengd  $AD$  er 10 cm?



9

10

11

12

8. Lausnarmengi ójafnanna  $-x^2 \leq x \leq \sqrt{|x|}$  er

$]-\infty, 1]$

$[-1, 0]$

$[0, 1]$

$]-\infty, -1] \cup [0, 1]$

9. Það eru 24 fjögurra stafa tölur sem nota alla tölustafina 2, 4, 5 og 7. Aðeins ein af þessum tölum er margfeldi af annarri slíkri tölu. Hver er hún?

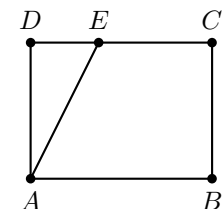
5724

7245

7254

7425

10. Flatarmál þríhyrningsins  $ADE$  er  $1/5$  af flatarmáli ferhyrningsins  $ABCE$ . Hvert er hlutfallið  $\frac{DE}{EC}$ ?



$\frac{1}{5}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}$

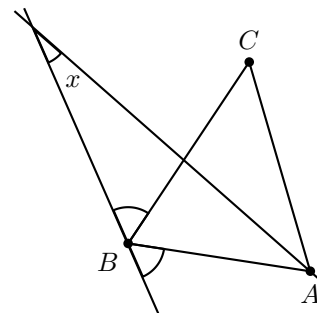
## Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

11. Guðrún tekur bolla fullan af vatni og hellir  $1/5$  af innihaldinu. Hún fyllir bollann síðan með olíu og hrærir vel. Hún hellir  $1/4$  úr bollanum og fyllir svo með olíu og hrærir aftur. Að lokum hellir hún  $1/3$  af blöndunni úr bollanum og fyllir eins og áður. Hve mörg prósent af blöndunni er olía?

Svar: \_\_\_\_\_

12. Í þríhyrningnum  $ABC$  er hornið  $C$  jafnt  $50^\circ$ . Helminglína hornsins  $A$  og lína sem dregin er hornrétt á helmingalínu hornsins  $B$  mynda hornið  $x$ . Hver er stærð hornsins  $x$ ?



Svar: \_\_\_\_\_

13. Þrjú daga í röð ók Jón bíl sínum í vinnuna. Fyrsta daginn hélt Jón meðalhraða 40 km/klst og var 3 mínútum of seinn. Annan daginn hélt hann meðalhraða 60 km/klst og var 8 mínútum of fljótur. Þriðja daginn mætti Jón á réttum tíma í vinnuna. Hver var meðalhraði Jóns þann daginn?

Svar: \_\_\_\_\_

14. Lausnir jöfnunnar  $x^2 - 85x + c = 0$  eru frumtölur (prímtölur). Hvert er gildið á  $c$ ?

Svar: \_\_\_\_\_

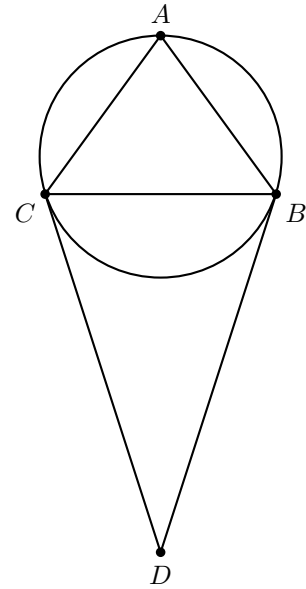
15. Hversu margar ólíkar útkomur fást með því að leggja saman þrjár ólíkar tölur úr safninu  $\{3, 6, 9, \dots, 27, 30\}$ ?

Svar: \_\_\_\_\_

**Þriðji hluti**

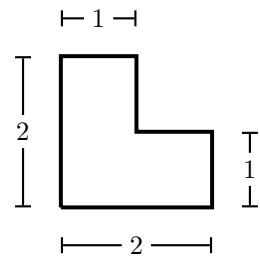
Í þessum hluta er hvert dæmi tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs, nákvæmni og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

- 16.** Gefinn er hvasshyrndur jafnarma þríhyrningur  $ABC$  og umritaður hringur hans. Snertlar við hringinn í  $B$  og  $C$  skerast í  $D$ . Einnig er  $\angle ABC = \angle ACB = 2\angle CDB$ . Finnið hornið  $\angle CAB$ .



- 17.** Finnið allar framtölur (prímtölur)  $p$ ,  $q$  og  $r$  þannig að  $p > q > r$  og tölurnar  $p - q$ ,  $p - r$  og  $q - r$  séu líka framtölur.

18. Ferningur hefur hliðarlengdina  $n$  þar sem  $n$  er heil tala. Ferninginn á að þekja með  $L$ -laga hellum sem allar eru í laginu eins og myndin sýnir. Hver er minnsta talan  $n$  þannig að þetta sé framkvæmanlegt?



19. Leysið jöfnuna  $\sqrt[3]{x+9} - \sqrt[3]{x-9} = 3$ .