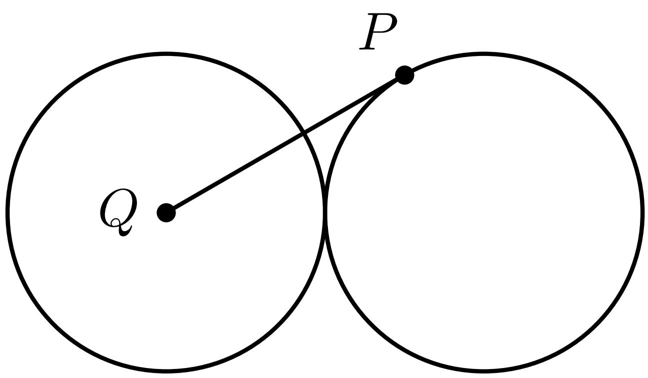
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2012–2013

Svör og lausnir

Neðra stig



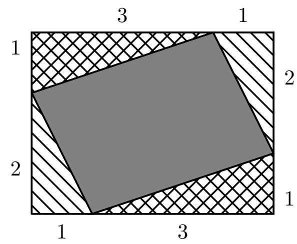
Fyrsti hluti

1. Þegar brotið $\dfrac{2^{n+3} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n+2}}$ er fullstytt fæst?

☐ $\frac{5}{8}$ ☒ $\frac{3}{4}$ ☐ $\frac{7}{8}$ ☐ 1

Skýring: $\dfrac{2^{n+3} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n+2}} = \dfrac{2 \cdot 2^n(2^2 - 1)}{2 \cdot 2^n \cdot 2^2} = \dfrac{2^2 - 1}{2^2} = \dfrac{3}{4}$

2. Rétthyrningur hefur hliðarlengdir 3 cm og 4 cm. Hvert er flatarmál innritaðs samsíðungs ef hver hornpunktur hans er 1 cm frá næsta hornpunkti ferhyrningsins?



☐ 5 cm^2 ☐ 6 cm^2 ☒ 7 cm^2 ☐ 8 cm^2

Skýring: Til samans mynda þríhyrningarnir fjórir, utan innritaða samsíðungsins, tvo rétthyrninga, 3×1 og 2×1. Flatarmál innritaða samsíðungins er því $12 - 3 - 2 = 7$ cm^2.

3. x, y og z eru jákvæðar heiltölur og $x + \dfrac{1}{y + \frac{1}{z}} = \dfrac{8}{3}$. Hvert er gildið á z?

☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4

Skýring: $\dfrac{8}{3} = 2 + \dfrac{2}{3} = 2 + \dfrac{1}{3/2} = 2 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}$. Svo að $z = 2$.

4. Ef skipta á k karamellum jafnt á milli 7 félaga þá verða 3 afgangs. Hve margar verða afgangs þegar $3 \cdot k$ karamellum er skipt jafnt milli þessara 7 félaga?

☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Skýring: Heildarfjöldi karamella er $k = 7n + 3$ svo $3 \cdot k$ karamellur eru alls $3(7n + 3) = 7 \cdot 3n + 9 = 7 \cdot (3n + 1) + 2$. Þá sést að ef $3 \cdot k$ karamellum er skipt jafnt fær hver $3n + 1$ karamellu og 2 verða afgangs.

5. Hver er síðasti tölustafur tölunnar $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 2013$ (margfeldi allra oddatalna frá 1 til 2013)?

☐ 1 ☐ 3 ☒ 5 ☐ 7

Skýring: Talan er margfeldi af 5 og endar því á 0 eða 5; líkt og öll margfeldi af 5. Talan er einnig margfeldi oddatalna og því oddatala sjálf. Þar með verður hún að enda á 5.

6. Jón er nú þrisvar sinnum eldri en Gunna, en fyrir fimm árum var aldur hans fjórfaldur aldur hennar, í árum talið. Hve mörg ár eru þar til hann verður tvöfalt eldri en hún?

☐ 12 ☒ 15 ☐ 18 ☐ 21

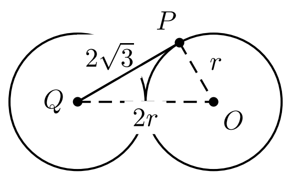
Skýring: Táknum aldur Jóns með j og aldur Gunnu með g. Nú gildir að $j = 3g$ og fyrir fimm árum gilti að $j - 5 = 4(g - 5)$. Séu þessar jöfnur leystar saman fæst að $g = 15$ og $j = 45$. Eftir fimmtán ár verður Gunna 30 ára og Jón 60 ára, tvöfalt eldri en Gunna.

7. Þegar vatn fyllir krukku að 1/5 hluta þá vegur hún 560 grömm og þegar vatn fyllir krukkuna að 4/5 hluta þá vegur hún 740 grömm. Hve mörg grömm er krukkan tóm?

☐ 440 ☐ 460 ☐ 480 ☒ 500

Skýring: Táknum þyngd krukkunnar með x og þyngd 1/5 hluta þess vatns sem krukkan tekur með y. Þá er gefið að $x + y = 560$ og $x + 4y = 740$. Séu jöfnurnar leystar saman fæst að $x = 500$.

8. Myndin sýnir tvo jafnstóra hringa sem snertast. Lengd snertils frá öðrum hringnum að miðju hins er $PQ = 2\sqrt{3}$ cm. Hve margir cm er geisli (radíus) hringanna?



☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\sqrt{2}$ ☐ $\sqrt{3}$ ☒ 2

Skýring: Þríhyrningurinn QPO, þar sem O er miðja hægri hrings, er rétthyrndur með langhlið $2r$ og skammhliðar $2\sqrt{3}$ og r, þar sem r er sameiginlegur geisli hringanna. Samkvæmt reglu Pýþagórasar er

$$(2\sqrt{3})^2 + r^2 = (2r)^2 \quad \text{eða} \quad 12 + r^2 = 4r^2.$$

Þá er $r^2 = 4$ og því $r = 2$.

9. Ef m er ferningstala (annað veldi heillar tölu) er næsta ferningstala stærri en m jöfn

☒ $m + 2\sqrt{m} + 1$ ☐ $m^2 + 2m + 1$ ☐ $m + 1$ ☐ $\sqrt{m} + 1$

Skýring: Ef m er ferningstala þá er $\sqrt{m}$ heiltala. Næsta ferningstala stærri en m er því $(\sqrt{m} + 1)^2 = m + 2\sqrt{m} + 1$.

10. Á hve marga vegu geta fimm vinir skipt í tvö lið, tveir á móti þremur?

☐ 4 ☐ 6 ☒ 10 ☐ 12

Skýring: Við teljum fjölda tveggja manna liða. Þann fyrsta má velja á fimm mismunandi vegu og þann næsta á fjóra mismunandi vegu. En það skiptir ekki máli í hvaða röð tveir félagar eru valdir saman í lið, svo heildarfjöldi ólíkra tveggja manna liða er $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$.

Annar hluti

11. Í nýrri íslenskri mynt er 8 krónu peningur og 13 krónu peningur. Hve marga peninga (myntir) fær maður alls þegar 100 krónu seðli er skipt í þessari mynt?

☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11 ☐ 12

Skýring: Ef 8 krónu peningarnir eru x talsins og 13 krónu peningarnir eru y þá er $8x + 13y = 100$. Með því að prufa sig áfram fæst að $8 \cdot 6 + 13 \cdot 4 = 100$. Peningarnir eru því alls 10.

12. Eftirfarandi fjórar fullyrðingar eru skrifaðar á miða:

(a) Nákvæmlega fjórar fullyrðingar á þessum miða eru ósannar.
(b) Nákvæmlega þrjár fullyrðingar á þessum miða eru ósannar.
(c) Nákvæmlega tvær fullyrðingar á þessum miða eru ósannar.
(d) Nákvæmlega ein fullyrðing á þessum miða er ósönn.

Hversu margar þeirra eru sannar?

☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☒ 1 ☐ ekki hægt að ákvarða

Skýring: Engar tvær fullyrðinganna geta verið sannar samtímis og ekki eru þær allar rangar því þá væri fyrsta fullyrðingin bæði rétt og röng; svo nákvæmlega ein fullyrðing er rétt, fullyrðing tvö.

13. Um hve mörg prósent eykst yfirborðsflatarmál rétthyrnds kassa þegar hliðarlengdir hans eru lengdar um 50%?

☐ 50% ☐ 100% ☒ 125% ☐ 237,5% ☐ 300%

Skýring: Ef hliðarlengdirnar eru kallaðar l, b og h. Þá er yfirborðsflatarmálið $A = 2(lb + lh + bh)$. Ef hliðarlengdir eru lengdar um 50% verða þær $1{,}5l$, $1{,}5b$ og $1{,}5h$ og þá verður yfirborðsflatarmál kassans $(1{,}5)^2 \cdot A = 2{,}25A$; aukning um 125%

14. Anna, Jón og Sigga hlaupa 10 km hlaup með jöfnum hraða hvert um sig. Þegar Anna kemur í mark, er hún 2 km á undan Jóni og 4 km á undan Siggu. Hve langt á undan Siggu er Jón þegar hann kemur í mark?

☐ 2 km ☐ 2,25 km ☒ 2,5 km ☐ 2,75 km ☐ 3 km

Skýring: Þegar Jón hefur hlaupið 8 km þá hefur Sigga hlaupið 6 km og þar sem allir hlaupa á jöfnum hraða þá hefur Sigga hlaupið 1,5 km þegar Jón hefur hlaupið 2 km. Þá hefur Sigga hlaupið $5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5$ km þegar Jón hefur hlaupið $5 \cdot 2 = 10$ km og kemur í mark. Jón kemur því 2,5 km á undan Siggu í mark.

15. Ferningur og hringur hafa sama ummál. Hvert er hlutfallið milli flatarmáls hringsins og flatarmáls ferningsins?

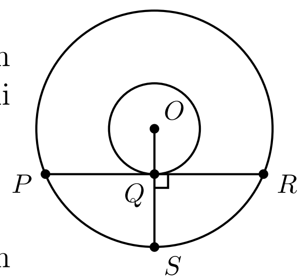
☐ $\frac{2}{\pi}$ ☐ $\frac{3}{\pi}$ ☒ $\frac{4}{\pi}$ ☐ $\frac{5}{\pi}$ ☐ $\frac{6}{\pi}$

Skýring: Ferningurinn hefur hliðarlengd x og ummál $4x$. Hringurinn hefur geisla (radíus) r og ummál $2\pi r$. Gefið er að $4x = 2\pi r$, svo $x = \frac{1}{2}\pi r$. Þá fæst

$$\frac{\text{flatarmál hrings}}{\text{flatarmál fernings}} = \frac{\pi r^2}{\left(\frac{1}{2}\pi r\right)^2} = \frac{4}{\pi}$$

Þriðji hluti

16. Myndin sýnir tvo sammiðja hringi með miðju O. Strengurinn PR er snertill innri hrings í punktinum Q. Hver er geisli (radíus) stærri hringsins ef gefið er að $PR = 12$ og $QS = 4$?



Svar: 6,5.

Skýring: Táknum geisla stærri hringsins með r. Þar sem $OP = r = OR$ þá er OS miðþverill snertilsins PR og því er $PQ = 6$. Þar sem $OS = r$ og $QS = 4$ þá er $OQ = r - 4$. Í þríhyrningnum PQO gildir jafna Pyþagórasar: $(r-4)^2 + 6^2 = r^2$. Þá er $8r = 52$, svo $r = 6{,}5$.

17. Fljótabátur siglir með jöfnum hraða. Þegar báturinn siglir með straumnum er hann 5 klst frá A til B, en 7 klst til baka. Hve langan tíma tekur það vélarvana pramma að fljóta með straumnum frá A til B?

Svar: 35 klst.

Skýring: Táknum vegalengdina frá A til B með d, hraða fljótabátsins á lygnu vatni með b og straumhraða fljótsins með f. Þá gildir að $5(b + f) = d$ og $7(b - f) = d$. Séu jöfnurnar leystar saman fæst: $70f = 2d$ eða $35f = d$. Það tekur því vélarvana pramma 35 klst að fljóta með straumnum frá A til B.

18. $0{,}abc$ er tugabrot með nákvæmlega þremur aukastöfum, sem enginn er 0. Einnig má skrifa $0{,}abc$ sem almennt brot $1/n$. Hvaða tala er n?

Svar: $n = 8$.

Skýring: Ef $0{,}abc = 1/n$ þá er $n \cdot abc = 1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Þar sem abc er þriggja stafa tala með engu núlli þá er n minni en 10. Þá eru möguleikarnir $n = 2$, $n = 4$, $n = 5$ eða $n = 8$ (vegna þáttunarinnar). Aðeins $1/8 = 0{,}125$ uppfyllir sett skilyrði, svo $n = 8$.

19. Hversu margar tveggja stafa tölur eru jafnar sjöfaldri þversummu sinni?

Svar: Fjórar.

Skýring: Táknum tveggja stafa töluna með ab þar sem $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ og $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Skilyrðið sem talan ab á að uppfyla er: $10a + b = 7(a + b)$, eða $a = 2b$. Þá getur b ekki verið 0 og þar sem $2b \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ eru aðeins fjórir möguleikar á vali b, $b = 1, 2, 3, 4$ og því fjórir möguleikar á tölunni ab; 21, 42, 63 eða 84.

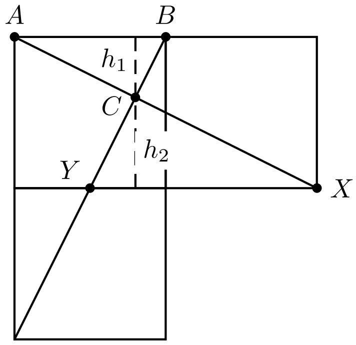
20. Hvert er gildið á $x^2 + y^2$ ef $x^2 - y^2 = 100$ og x og y eru jákvæðar heiltölur?

Svar: 1252

Skýring: Athugið að $x > y$. Þar sem $100 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ og $(x - y) + (x + y) = 2x$ er slétt tala þá eru þættirnir $(x - y)$ og $(x + y)$ báðir sléttar tölur. Eini möguleikinn á þáttun 100 í tvo slétta ólíka þætti er $2 \cdot 50$, Við ályktum því að $x - y = 2$ og $x + y = 50$. Þá er $x = 26$ og $y = 24$ og þar með $x^2 + y^2 = 26^2 + 24^2 = 1252$.

Fjórði hluti

21. Myndin sýnir þrjá jafnstóra ferninga með hliðarlengd 1. Hornpunktar ferninganna eru tengdir línustrikum eins og sýnt er. Línustrikin skerast í punkti C. Hvert er flatarmál þríhyrningsins ABC?



Lausn: Teiknum punktana X og Y inn á mynd eins og sýnt er. Þar sem AB er samsíða XY þá eru þríhyrningarnir ABC og XYC einslaga. Þar sem $XY = \frac{3}{2}AB$ þá er $h_2 = \frac{3}{2}h_1$ og þar sem $1 = h_1 + h_2 = h_1 + \frac{3}{2}h_1$ þá er $h_1 = \frac{2}{5}$. Þá má reikna flatarmál þríhyrnings ABC:

$$\text{Flatarmál}(ABC) = \frac{AB \cdot h_1}{2} = \frac{1 \cdot \frac{2}{5}}{2} = \frac{1}{5}.$$

22. Sýnið að fyrir sérhverja heiltölu $k \geq 2$ megi finna k jákvæðar heiltölur (ekki endilega ólíkar) þannig að summa talnanna sé jöfn margfeldi þeirra.

Lausn: Með því að prófa sig áfram fæst:

$k = 2$ $\quad 2 \cdot 2 = 2 + 2$
$k = 3$ $\quad 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$
$k = 4$ $\quad 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = 1 + 1 + 2 + 4$
$k = 5$ $\quad 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 = 1 + 1 + 1 + 2 + 5$
$k = 6$ $\quad 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 6$

Almennt, ef k er jákvæð heiltala þá veljum við k tölur á eftirfarandi hátt:

$(k-2)$ talnanna er 1, ein talnanna er 2 og síðasta talan er k.

Þá fæst:

$$1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 \cdot 2 \cdot k = 2k = 1 + 1 + \cdots + 1 + 2 + k$$

margfeldi talnanna er jafnt summu talnanna.

Ath: Hægt er að leysa dæmi á marga aðra vegu, t.d. virka bæði $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 = 1 + 1 + 1 + 3 + 3$ og $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1 + 1 + 2 + 2 + 2$ fyrir $k = 5$. En nóg er að finna einhverja kerfisbundna leið sem dugir fyrir öll $k \geq 2$ (og sýna að hún virki).

Við þökkum öllum þeim sem tóku þátt og aðstoðuðu við keppnina.

Auðun Sæmundsson
Friðrik Diego
Jóhanna Eggertsdóttir
Bjarni Vilhjálmur Halldórsson
Gunnar Freyr Stefánsson
Marteinn Þór Harðarson