

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2013–2014 Neðra stig

Nafn: _____

Kennitala: _____ Sími: _____

Heimilisfang: _____ Póstnúmer: _____

Netfang: _____

Skóli: _____ Bekkur eða áfangi: _____

Námsár í framhaldsskóla: 1. 2.

I	
II	
III	
21	
22	
Alls	

Leiðbeiningar:

- Opnið ekki spurningaheftið fyrr en ykkur er sagt að gera það.
- Færið inn allar upplýsingar sem beðið er um hér á undan áður en þið opnið heftið.
- Þetta er ekki venjulegt próf. Ekki er gert ráð fyrir að margir geti svarað öllum spurningunum. Þótt þið getið ekki svarað nema hluta þeirra, þá þarf það ekki að þýða að þið standið ykkur ekki vel. Sumar spurninganna eru mjög erfiðar.
- Keppnin er í fjórum hlutum. Í fyrsta hluta eru tíu spurningar sem gilda þrjú stig hver; í öðrum hluta eru fimm spurningar sem gilda fjögur stig hver; í þriðja hluta eru fimm spurningar sem gilda sex stig hver og í fjórða hluta eru tvær spurningar sem gilda tíu stig hvor. Hámarksfjöldi stiga er 100.
- Allar spurningar í fyrsta og öðrum hluta eru krossaspurningar. Á eftir hverri spurningu eru fjögur eða fimm hugsanleg svör. Aðeins eitt þeirra er rétt. Setjið kross í reitinn framan við rétta svarið. Ef þið getið ekki svarað spurningu, þá borgar sig yfirleitt ekki að giska á svarið, því að fyrir hvert rangt svar er dregið frá eitt stig.
- Í þriðja hluta á aðeins að tilgreina svör, en ekki sýna aðferðina sem notuð var. Svarið skal tilgreint á svarlínunni aftan við spurninguna. Fyrir rétt svar eru gefin sex stig, fyrir rangt svar, ófullkomið eða tvírætt svar er ekkert stig gefið.
- Í lausnum tveggja síðustu dæmanna, í fjórða hluta, á að gera fullkomna grein fyrir hvernig svarið var fengið. Færið inn endanlega lausn, ekki krot sem á heima á rissblöðum. Við mat lausna er tekið tillit til nákvæmni í röksemdafærslu og skýrleika í framsetningu.
- Hjálparmyndir sem fylgja sumum dæmunum eru aðeins ætlaðar til skýringar. Ekki er víst að þær séu teiknaðar í réttum hlutföllum.
- Þið hafið nákvæmlega tvær klukkustundir til að leysa verkefnið eftir að ykkur er leyft að byrja. **Notkun reiknivéla er óheimil.**

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar. Hver spurning er þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

1. Hvert er gildið á 3^{x-2} ef $3^x = 15$?

 1

 $\frac{5}{3}$
 5

 $\frac{15}{2}$

2. Á Geirsnefi er fólk á gangi með hundana sína. Á svæðinu eru 82 fætur og 26 höfuð alls. Hversu margir hundar eru á Geirsnefi?

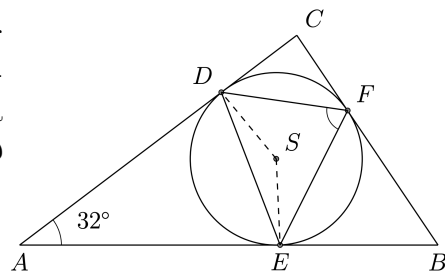
 10

 12

 15

 18

3. Innritaður hringur í þríhyrning ABC hefur miðpunktinn S og snertir hliðar þríhyrningsins í punktum D , E og F eins og sést á mynd. Ef hornið $\angle CAB$ er 32° þá er hornið $\angle EFD$ jafnt


 46°
 64°
 74°
 82°

4. Ef vara er seld fyrir x krónur er 15% tap á sölunni miðað við kostnað. Á hinn bóginn er 15% hagnaður af sölunni ef varan er seld fyrir y krónur. Hvert er hlutfallið $\frac{y}{x}$?

 $\frac{23}{17}$
 $\frac{17}{23}$
 $\frac{13}{10}$
 Er háð verði

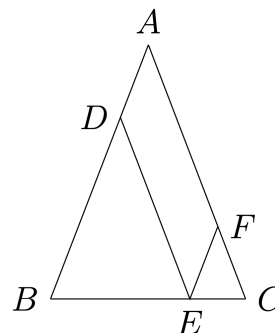
5. Ef tölunni x er bætt við bæði teljara og nefnara brotsins $\frac{a}{b}$, þar sem $a \neq b \neq 0$ og útkoman verður $\frac{c}{d}$ þá er x jafnt og

 $\frac{ad - bc}{c - d}$
 $\frac{ad - bc}{c + d}$
 $\frac{bc - ac}{c - d}$
 $\frac{bc - ac}{c + d}$

6. Gunnar, Fanney og Bergur fóru saman í helgarferð. Þau ákváðu að skipta kostnaðinum jafnt. Í ferðinni borgaði Gunnar 10500 kr., Fanney 12500 kr. og Bergur 17500 kr. Til að jafna út kostnaðinn þá lét Gunnar Berg fá x krónur og Fanney lét Berg fá y krónur. Hvert er gildið á $x - y$?

1500 2000 2500 3000

7. Í jafnarma þríhyrningi ABC er $AB = AC = 28$ cm og $BC = 20$ cm. Punktarnir D , E og F eru á hliðunum AB , BC og AC þannig að DE er samsíða AC og EF er samsíða AB . Hvert er ummál samsíðungsins $ADEF$ í cm?



48 52 56 60

8. Skilgreinum aðgerð $a * b = \frac{a}{a+b}$. Gefið er að $s * t = 5$, hvert er gildið á $t * s$?

-5 -4 3 2

9. Ef geisli (radíus) hrings er tvöfaldaður þá eykst flatarmál hringsins um

250% 300% 350% 400%

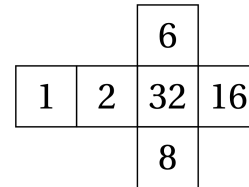
10. Geimflug flýgur frá jörðu að plánetu í 2^{20} km fjarlægð. Eftir fjórðung leiðarinnar missir geimflugin talstöðvarsamband við jörðu og nær aftur talstöðvarsambandi þegar geimflugin er 2^{19} km fjarlægð frá jörðu. Hversu marga kílómetra flaug geimflugin án talstöðvarsambands við jörðu?

2^8 km 2^9 km 2^{10} km 2^{18} km

11. Milli kl. 14.00 og kl. 15.00 falla stóri og litli vísir saman. Þá er klukkan næst því að vera

14.09 14.10 14.11 14.12 14.13

12. Þrjú eins teningar eru gerðir úr mynstrinu sem sýnt er. Teningunum er raðað í þriggja hæða turn þannig að þær 13 tölur sem sjást hafi sem stærsta summu. Hver er sú summa?

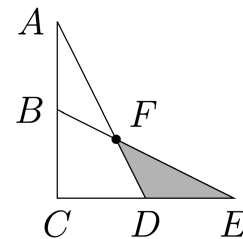


154 159 166 167 189

13. Sigríður fer nokkrum sinnum á dag til Sveins gjaldkera með reikninga. Hún lætur reikning alltaf efst í staflann hjá Sveini. Þegar Sveinn hefur tíma tekur hann efsta reikninginn í staflanum og afgreiðir hann. Einn daginn eru reikningarnir fimm og Sigríður kemur með þá í röðinni 1, 2, 3, 4, 5. Í hvaða röð gæti Sveinn ekki hafa afgreitt reikningana?

1,2,3,4,5 2,4,3,5,1 3,2,4,1,5 4,5,2,3,1 5,4,3,2,1

14. Strikin AC og CE eru bæði 30 cm og mynda rétt horn. D er miðpunktur CE og B er miðpunktur AC . Strikin AD og BE skerast í punkti F . Hvert er flatarmál þríhyrnings DEF ?



50 $50\sqrt{2}$ 75 $\frac{15}{2}\sqrt{105}$ 100

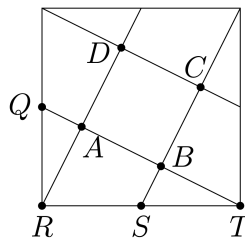
15. Jörmunrekur þarf að ýta þungum steinum upp á fjall, einum steini á hverjum degi. Fyrsta daginn tekur það 7 tíma að ýta steininum upp og labba niður. Næstu daga fer hann hvern dag helmingi hægar upp fjallið en daginn á undan og tvöfalt hraðar niður en daginn á undan. Ef hann þarf 8 tíma til að fara upp og niður á öðrum degi, hvað þarf hann þá marga tíma á þriðja degi?

7 $8\frac{1}{2}$ 9 $10\frac{1}{4}$ 13

Priðji hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

16. Ferningur hefur hliðarlengdir 1. Frá hverjum hornpunkti er dregið strik að miðpunkti hliðar, eins og sýnt er á mynd. Hvert er flatarmál ferhyrningsins $ABCD$?



Svar: _____

17. Ef n er jákvæð heiltala þá látum við $p(n)$ tákna þversummu hennar. Til dæmis er $p(138) = 12$ og $p(2013) = 6$. Finnið summuna $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(100)$.

Svar: _____

18. Vatnsdæla fyllir tank á 12 klst. Ef opnað er fyrir niðurfall þá tæmist tankurinn á 20 klst. Hversu langan tíma tekur að fylla tankinn ef niðurfallið opnast óvart þegar tankurinn er hálf-fullur?

Svar: _____

19. Táknum tölurnar 1, 2, 3, 4, 5 með p, q, r, s, t nema hvað röðin má vera önnur (t.d. gæti verið að $p = 4, q = 2, r = 5, s = 3$ og $t = 1$). Látum

$$x = \frac{1}{p + \frac{1}{q + \frac{1}{r + \frac{1}{s + \frac{1}{t}}}}}$$

Gildin á p, q, r, s, t eru valin svo að x verði sem stærst. Hvaða gildi hefur t ?

Svar: _____

20. Finnið lausn (x, y) á jöfnunni $3x^2 = 3y^4 + 2013$ þar sem x og y eru jákvæðar heiltölur.

Svar: _____

Fjórði hluti

Í þessum hluta eru fjögur dæmi og er hvert dæmi tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs, nákvæmni og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

21. Jafnan $x^2 + px + q = 0$ hefur lausnir r og s . Ritið summuna $r^3 + s^3$ með tilliti til p og q .

22. Punktur A , B , C , D eru, í þessari röð, á beinni línu. Punktur P utan línunnar er valinn þannig að eftirfarandi þremur skilyrðum er fullnægt:

(a) $\angle APC = 90^\circ$

(b) $|CP| = |CD|$

(c) $|AP|^2 = |AB| \cdot |AD|$

Sýnið að hornið $\angle BPD$ sé rétt horn.