

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2013–2014 Efra stig

Nafn: _____

Kennitala: _____ Sími: _____

Heimilisfang: _____ Póstnúmer: _____

Netfang: _____

Skóli: _____ Bekkur eða áfangi: _____

Námsár í framhaldsskóla: 1. 2. 3. 4.

I	
II	
16	
17	
18	
19	
Alls	

Leiðbeiningar:

- Opnið ekki spurningaheftið fyrr en ykkur er sagt að gera það.
- Færið inn allar upplýsingar sem beðið er um hér á undan áður en þið opnið heftið.
- Þetta er ekki venjulegt próf. Ekki er gert ráð fyrir að margir geti svarað öllum spurningunum. Þótt þið getið ekki svarað nema hluta þeirra, þá þarf það ekki að þýða að þið standið ykkur ekki vel. Sumar spurninganna eru mjög erfiðar.
- Keppnin er í þremur hlutum. Í fyrsta hluta eru tíu spurningar sem gilda þrjú stig hver; í öðrum hluta eru fimm spurningar sem gilda sex stig hver og í þriðja hluta eru fjórar spurningar sem gilda tíu stig hver. Hámarksfjöldi stiga er 100.
- Allar spurningar í fyrsta hlutanum eru krossaspurningar. Á eftir hverri spurningu eru fjögur hugsanleg svör. Aðeins eitt þeirra er rétt. Setjið kross í reitinn framan við rétta svarið. Ef þið getið ekki svarað spurningu, þá borgar sig yfirleitt ekki að giska á svarið, því að fyrir hvert rangt svar er dregið frá eitt stig.
- Í öðrum hluta á aðeins að tilgreina svör, en ekki sýna aðferðina sem notuð var. Svarið skal tilgreint á svarlínunni aftan við spurninguna. Fyrir rétt svar eru gefin sex stig, fyrir rangt svar, ófullkomið eða tvírætt svar er ekkert stig gefið.
- Í lausnum fjögurra síðustu dæmanna, í þriðja hluta, á að gera fullkomna grein fyrir hvernig svarið var fengið. Færið inn endanlega lausn, ekki krot sem á heima á rissblöðum. Við mat lausna er tekið tillit til nákvæmni í röksemdafærslu og skýrleika í framsetningu.
- Hjálparmyndir sem fylgja sumum dæmunum eru aðeins ætlaðar til skýringar. Ekki er víst að þær séu teiknaðar í réttum hlutföllum.
- Þið hafið nákvæmlega tvær og hálf klukkustund til að leysa verkefnið eftir að ykkur er leyft að byrja. **Notkun reiknivéla er óheimil.**

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar. Hver spurning er þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

1. Hvert er gildið á 3^{x-2} ef $3^x = 15$?

 1

 $\frac{5}{3}$
 5

 $\frac{15}{2}$

2. Nokkrir félagar halda veislu og skipta kostnaði jafnt með sér. Heildarkostnaður er 60 þúsund krónur. Einn félagi til viðbótar slæst í hópinn. Þá eykst heildarkostnaður um 10 þúsund krónur en hlutur hvers lækkar um 1 þúsund. Hversu margir voru félagarnir upphaflega?

 3

 4

 5

 6

3. Rauntölurnar x og y fullnægja jöfnunni $x^2 + y^2 = 10x - 6y - 34$. Hvert er gildið á $x + y$?

 1

 2

 3

 4

4. Ragna, Sigrún, Tinna, Una og Vera hittast á kaffihúsi. Ragna heilsar nákvæmlega einni hinna með handabandi og Sigrún heilsar líka nákvæmlega einni hinna með handabandi. Tinna, Una og Vera heilsa hins vegar nákvæmlega tveimur hinna með handabandi hver um sig. Það er alveg víst að Ragna og Vera heilsuðust með handabandi. Hverjar eftirtalinna hafa án nokkurs vafa EKKI heilsast með handabandi?

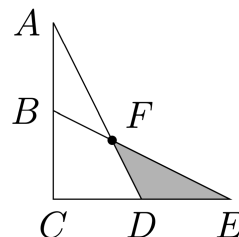
 Vera og Una

 Vera og Tinna

 Sigrún og Tinna

 Sigrún og Vera

5. Strikin AC og CE eru bæði 30 cm og mynda rétt horn. D er miðpunktur CE og B er miðpunktur AC . Strikin AD og BE skerast í punkti F . Hvert er flatarmál þríhyrnings DEF í cm^2 ?


 50

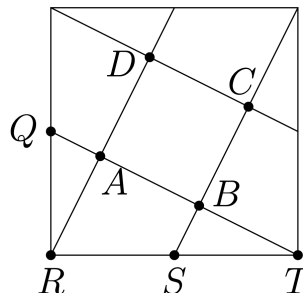
 $50\sqrt{2}$
 75

 $\frac{15}{2}\sqrt{105}$

6. Skilgreinum aðgerð $a * b = \frac{a}{a+b}$. Gefið er að $s * t = 5$, hvert er gildið á $t * s$?

-5 -4 3 2

7. Ferningur hefur hliðarlengdir 1. Frá hverjum hornpunkti er dregið strik að miðpunkti hliðar, eins og sýnt er á mynd. Hvert er flatarmál ferhyrningsins $ABCD$?



$\frac{\sqrt{2}}{9}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{\sqrt{3}}{9}$ $\frac{1}{5}$

8. Um þriggja stafa töluna abc gildir að $a > c$ og að mismunurinn $abc - cba$ er þriggja stafa tala með 4 sem fyrsta tölustaf. Þá eru annar og þriðji tölustafur mismunarins

4 og 9 9 og 5 5 og 4 Ekki ótvírætt svar

9. Ef deilt er í $y^2 - my + 2$ með $y - 1$ fæst sama leif og ef deilt er með $y + 1$. Hvert er gildið á m ?

0 1 2 Upplýsingar skortir

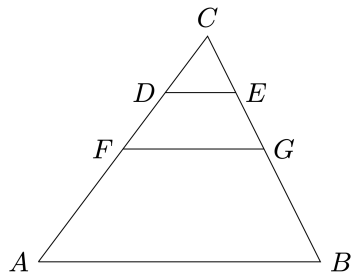
10. Jörmunrekur þarf að ýta þungum steinum upp á fjall, einum steini á hverjum degi. Fyrsta daginn tekur það 7 tíma að ýta steininum upp og labba niður. Næstu daga fer hann hvern dag helmingi hægar upp fjallið en daginn á undan og tvöfalt hraðar niður en daginn á undan. Ef hann þarf 8 tíma til að fara upp og niður á öðrum degi, hvað þarf hann þá marga tíma á þriðja degi?

$8\frac{1}{2}$ 9 $10\frac{1}{4}$ 13

Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

11. Í þríhyrningi ABC eru strikin DE og FG samsíða hlið AB . Hlutfallið milli fjarlægða frá hlið AB til striks FG annars vegar og frá striki FG til striks DE hinsvegar er $2 : 1$. Finnið flatarmál þríhyrnings FGC ef gefið er að flatarmál ABC er 32 cm^2 og flatarmál DEC er 2 cm^2 .



Svar: _____

12. Ef n er jákvæð heiltala þá látum við $p(n)$ tákna þversummu hennar. Til dæmis er $p(138) = 12$ og $p(2013) = 6$. Finnið summuna $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(100)$.

Svar: _____

13. Táknum tölurnar 1, 2, 3, 4, 5 með p, q, r, s, t nema hvað röðin má vera önnur (t.d. gæti verið að $p = 4, q = 2, r = 5, s = 3$ og $t = 1$). Látum

$$x = \frac{1}{p + \frac{1}{q + \frac{1}{r + \frac{1}{s + \frac{1}{t}}}}}$$

Gildin á p, q, r, s, t eru valin svo að x verði sem stærst. Hvaða gildi hefur t ?

Svar: _____

14. Fall f er þannig að $f(x) + f(1-x) = 10$ fyrir allar rauntölur x . Hver er summan

$$f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{2}{100}\right) + \dots + f\left(\frac{99}{100}\right)?$$

Svar: _____

15. Finnið lausn (x, y) á jöfnunni $3x^2 = 3y^4 + 2013$ þar sem x og y eru jákvæðar heiltölur.

Svar: _____

Fjórði hluti

Í þessum hluta eru fjögur dæmi og er hvert dæmi tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs, nákvæmni og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

16. Jafnan $x^2 + px + q = 0$ hefur lausnir r og s . Ritið summuna $r^3 + s^3$ með tilliti til p og q .

17. Punktur A , B , C , D eru, í þessari röð, á beinni línu. Punktur P utan línunnar er valinn þannig að eftirfarandi þremur skilyrðum er fullnægt:

(a) $\angle APC = 90^\circ$

(b) $|CP| = |CD|$

(c) $|AP|^2 = |AB| \cdot |AD|$

Sýnið að hornið $\angle BPD$ sé rétt horn.

18. Finnið allar rauntölur x , y og z þannig að $(x + 1)yz = 12$, $(y + 1)zx = 4$ og $(z + 1)xy = 4$.

19. Finnið allar rauntölur x þannig að $a = \frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 3}$ sé heiltala.