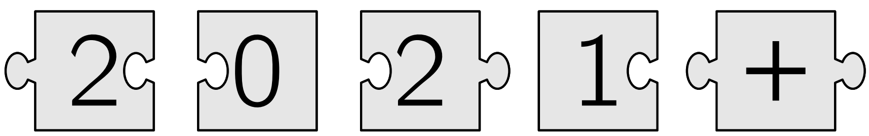
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2021–2022

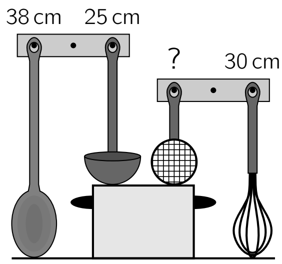
Svör og lausnir

Neðra stig



Fyrsti hluti

1. Eldhúsáhöld hanga á snögum á vegg. Hversu langt er sigtið?



15 cm   7 cm   17 cm   20 cm

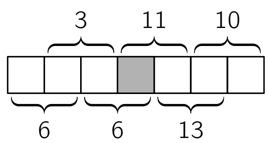
Skýring: Ef við drögum lengd písksins frá lengd sleifarinnar þá fæst að það munar 38cm − 30cm = 8cm á lengd ausunnar og sigtisins. Því er sigtið 25cm − 8cm = 17cm að lengd.

2. Hvert eftirtaldra brota er stærst?

$\dfrac{4+3}{2}$ $\dfrac{4}{3+2}$ $\dfrac{3+2}{4}$ $\dfrac{3}{4+2}$

Skýring: Einungis fyrsta og þriðja brotið eru með teljara sem er stærri en nefnari. Einungis þau tvö koma því til greina. Athugum þau tvö nánar og sjáum að $\frac{7}{2} = \frac{14}{4} > \frac{5}{4}$.

3. Regína raðar tölustöfunum 1,2,3,4,5,6,7 í reitina til hægri. Tölurnar við slaufusvigana standa fyrir summu nágrannatalna. Hvaða tölustafur verður að standa í gráa reitnum til að þetta gangi upp?



2   3   4   5

Skýring: Summa talnanna sem Regína notar er $1+2+\cdots+7 = 28$. Tölur efri slaufusviga hafa summuna $3+10+11 = 24$ svo talan 4 verður að vera í fyrsta reit. Þá má rekja sig til hægri með vísan í neðri og efri slaufusviga; 2 í öðrum reit, 1 í þriðja reit og 5 í skyggða reitnum. (Allt eins má nota tölur neðri slaufusviga og fá að talan í síðasta reit verður að vera 3; rekja sig svo til vinstri.)

4. Í dæminu hér til hliðar standa P, Q og R fyrir ólíkar jákvæðar heiltölur (allar mini en 10). Hvert er gildið á $P+Q+R$?

$$\begin{array}{cccc} & P & 7 & R \\ + & 3 & 9 & R \\ \hline & R & Q & 0 \end{array}$$

3   12   13   14

Skýring: Tökum eftir að $R = 0$ því $R \geq 3 + P > 3$. Þá verður $R = 5$ og því $Q = 7$. Þá fæst loks að $1 + P + 3 = 5$, svo $P = 1$ og þar með $P + Q + R = 1 + 7 + 5 = 13$.

5. Nokkrar vinkonur eiga saman poka af karamellum og borða úr honum á fjórum dögum en skilja síðan afganginn eftir.

Á fyrsta degi borða þær $\frac{1}{2}$ af karamellunum í pokanum.
Á öðrum degi borða þær $\frac{2}{3}$ af karamellunum sem eftir eru.
Á þriðja degi borða þær $\frac{3}{4}$ af karamellunum sem eftir eru.
Á fjórða degi borða þær $\frac{4}{5}$ af karamellunum sem eftir eru.

Hvað voru í minnsta lagi margar karamellur í pokanum í upphafi, áður en vinkonurnar byrjuðu að borða þær?

60	120	180	240

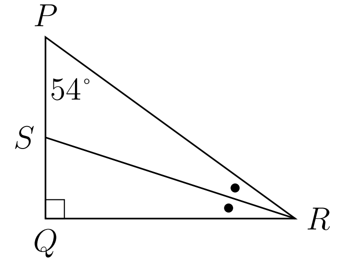
Skýring: Táknum fjölda af karamellum í upphafi með x. Í lok fyrsta, annars, þriðja og fjórða dags er fjöldi karamella sem eftir eru $\frac{1}{2} \cdot x$, $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x$, $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x$ og $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x = \frac{1}{120}x$. Upphaflegur fjöldi, x, er því margfeldi af 120; 120 eða 240 eða 360 eða $\ldots$. Minnstur fjöldi er 120.

6. Auðun álfur og Trausti tröll hittast. Auðun segir alltaf satt og Trausti lýgur alltaf. Báðir segja nákvæmlega sömu setninguna. Hvaða setning getur það verið?

Við segjum báðir satt	Ég lýg alltaf	Ég segi satt	Annar okkar segir satt og hinn lýgur

Skýring: Þar sem Auðun segir alltaf satt þá eru fyrstu tveir svarmöguleikarnir úr leik. Þar sem Trausti lýgur alltaf þá er fjórði svarmöguleikinn einnig úr leik. Þá er aðeins þriðji svarmöguleikinn eftir; setning sem bæði Auðun og Trausti geta vel sagt.

7. Á myndinni er PQR rétthyrndur með Q rétt og $\measuredangle QPR = 54°$. Punktur S liggur á PQ þannig að $\measuredangle PRS = \measuredangle SRQ$. Hvað er $\measuredangle QSR$ stórt?



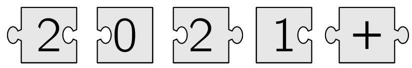
18°	36°	54°	72°

Skýring: Þar sem hornasumma þríhyrnings er 180° og $]PQR = 90^\circ$ Þá fæst

$$\text{Þríhyrningur } PQR: \quad 54^\circ + R = 90^\circ \qquad \text{(i)}$$
$$\text{Þríhyrningur } SQR: \quad S + \tfrac{1}{2}R = 90^\circ \qquad \text{(ii)}$$

Úr jöfnu (i) fæst að $R = 36^\circ$ og þá fæst úr jöfnu (ii) að $S = 90^\circ - \frac{1}{2}R = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$

8. Með því að raða þessu rétt saman fæst reikningsdæmi. Hver er útkoman úr því dæmi?



22 32 41 122

Skýring: Við sjáum strax að púslið með ásnum hlýtur að vera vinstri endi dæmisins og að púslið með núllinu hlýtur að vera hægri endi dæmisins. Einnig sjáum við fljótt að eina leiðin til að raða tvistunum og plúsnum þannig að þeir myndi púslanlega röð er að hafa plúsinn í miðjunni og sinn hvorn tvistinn til hliðar við plúsinn þannig að dæmið $12 + 20$ myndast og svar þess er 32.

9. Í Húsdýragarðinum telur Anna kýr og hesta, samtals 12 dýr. Breki telur kýr og grísi, samtals 22 dýr. Díana telur hesta og grísi, samtals 24 dýr. Einar telur kýr, hesta og grísi. Hvaða tölu fær hann?

26 29 34 48

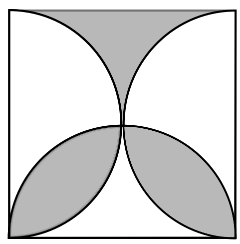
Skýring: Ef k er fjöldi kúa, h fjöldi hesta og g fjöldi grísa þá höfum við að

$$k + h = 12, \quad k + g = 22, \quad \text{og} \quad h + g = 24$$

Við viljum finna $k + h + g$. Tökum eftir að

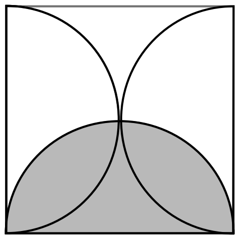
$$12 + 22 + 24 = (k + h) + (k + g) + (h + g) = 2(k + h + g)$$
$$\text{svo} \quad k + h + g = \tfrac{1}{2}(12 + 22 + 24) = 29$$

10. Á myndinni er ferningur með hliðarlengd 2. Þrír hálfhringir skerast í miðjum ferningnum. Hvert er flatarmál skyggða svæðisins?



$2 - \dfrac{\pi}{2}$ $4 - \pi$ $4 - \dfrac{3\pi}{4}$ $\dfrac{\pi}{2}$

Skýring: Ef við speglum efra skyggða svæðinu um lárétta helmingalínu ferhyrningsins þá fáum við neðra óskyggða svæðið; hálfa hringskífu með geisla 1, sem hefur flatarmálið $\frac{1}{2} \cdot 1^2\pi = \frac{\pi}{2}$.



Annar hluti

11. Jákvæð heiltala kallast spegiltala ef hana má lesa eins aftur á bak og áfram. Talan 13931 er dæmi um spegiltölu. Finndu næstu spegiltölu á eftir 13931 og leggðu saman alla tölustafi hennar. Hver er útkoman?

8 10 11 14 19

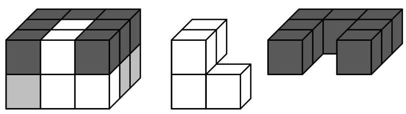
Skýring: Við leitum að fimm stafa tölu $abcba$ sem er **stærri** en gefna spegiltalan. Talan ræðst alfarið af fyrstu þremur tölustöfunum. Þá þarf abc að vera stærri en 139. Talan er þá 14041 með summu tölustafa 10.

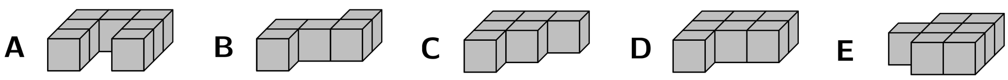
12. Hver af eftirtöldum tölum er summa af þremur samliggjandi tölum (tölum í röð)?

178 191 225 259 428

Skýring: Þrjár samliggjandi heiltölur má rita $n - 1$, n og $n + 1$. Summa talnanna er $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$; margfeldi af 3. Aðeins ein talnanna fimm er margfeldi af 3, talan $225 = 3 \cdot 75$.

13. Hvaða ljósgrái kubbur var notaður?





A **B** **C** **D** **E**

Skýring: Samsetti réttstrendingurinn er settur saman út tveimur 3×3 lögum af teningum. Dökkgrái og hvíti kubburinn fylla saman allt efra lagið. Í neðra laginu eru það einungis tveir teningar sem hvíti kubburinn nær að fylla, það eru fremsti miðju teningurinn og fremsti hægri teningurinnn (frá lesanda séð). Því vantar í neðsta lagið alla öftustu röðina, alla miðju röðina og fremsta vinstri teninginn. Þetta svæði svarar til kubbs **D**.

14. Ef $m+1=\frac{n-2}{3}$, hvert er þá gildið á $3m-n$?

-1 -5 -3 -9 -7

Skýring: Þar sem $m+1=\dfrac{n-2}{3}$ þá er $3m+3=n-2$ og því $3m-n=-2-3=-5$.

15. Hve margar heilar tölur milli 100 og 300 eru margfeldi af bæði 5 og 7, en eru ekki margfeldi af 10?

1 2 3 4 5

Skýring: Til þess að tala sé margfeldi af bæði 5 og 7, en ekki margfeldi af 10, þá þarf frumþáttun tölunnar að innihalda bæði 5 og 7 en má alls ekki innihalda 2. Hún er því margfeldi af $5\cdot 7=35$. Fáum að $35\cdot 3=105$, $35\cdot 5=175$, $35\cdot 7=245$ en $35\cdot 3^2=315>300$. Við sjáum því að það er einungis um þrjár tölur að ræða.

Þriðji hluti

16. Á hvaða tölustaf endar 2^{2021}, þegar talan er skrifuð í tugakerfi?

Svar: 2

Skýring: Nokkur fyrstu veldin af 2 eru

$$\mathbf{2},\ \mathbf{4},\ \mathbf{8},\ 1\mathbf{6},\quad 3\mathbf{2},\ 6\mathbf{4},\ 12\mathbf{8},\ 25\mathbf{6},\quad 51\mathbf{2},\ 102\mathbf{4},\ \ldots$$

Lotan $\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{8},\mathbf{6}$ endurtekur sig. Nú er $2^{2021}=2^{4\cdot 505}\cdot 2$. Lotan er endurtekinn 505 sinnum og tekið er eitt skref inn í nýja lotu; á tölustafinn **2**

17. Blær ekur 42 km til vinnu. Vegna framkvæmda kemst hán aðeins með hraða 12 km/klst fyrstu 21 km. Hve hratt þarf hán að aka seinni 21 km leiðarinnar til að ná meðalhraða 20 km/klst fyrir alla leiðina?

Svar: 60km/klst.

Skýring: Á meðalhraða 20 km/klst tekur það Blæ $42/20=21/10$ klukkustundir að komast í vinnuna. Hán hefur þegar eytt $21/12=7/4$ klukkustundum í akstur fyrstu 21 km, svo seinni 21 km verður hán að aka á $21/10-7/4=7/20$ klukkustundum sem gerir meðalhraðann $21/(7/20)=60$ km/klst.

18. Hver er stærsta frumtalan sem gengur upp í $4^{11}-2^{12}$?

Svar: 31.

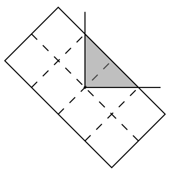
Skýring: Ritum $4 = 2^2$ og þáttum:

$$\begin{aligned}(2^2)^{11} - 2^{12} = 2^{22} - 2^{12} &= 2^{12}(2^{10} - 1)\\ &= 2^{12}(2^5 + 1)(2^5 - 1) = 2^{12} \cdot 33 \cdot 31\\ &= 2^{12} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31\end{aligned}$$

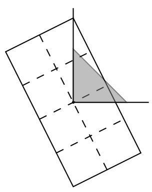
19. Edda á snjallsíma sem er rétthyrndur með hlutfall lengdar og breiddar 2 : 1. Á horni rétthyrnds borðs vegur sími Eddu salt og er næstum dottinn fram af. Hversu stór hluti bakhliðar símans getur staðið fram af borðinu í mesta lagi án þess að hann detti? Síminn dettur ef miðja hans er utan borðflatarins.

Svar: $\dfrac{7}{8}$.

Skýring: Þar sem síminn dettur ekki ef miðja hans er á borðfletinum þá stendur stærstur hluti símans útaf borðinu ef miðja hans er á horni borðsins. Spurningin er hvernig snúa skuli símanum svo að snertiflötur síma og borðs sé minnstur. Snertiflöturinn er rétthyrndur þríhyrningur með flatarmál jafnt hálfri lengd langhliðar (því hæðin á langhlið er alltaf 1).



Snúum símanum þannig að snertiflötur myndi jafnarma rétthyrndan þríhyrning. Þá er langhliðin styst.



20. Sjö tölustafa heiltala sem inniheldur ekkert núll kallast *minnisstæð* ef fyrstu þrír tölustafir hennar endurtaka sig í nákvæmlega sömu röð annars staðar í tölunni. Til dæmis eru 1111111, 1231234 og 9642964 allt dæmi um minnisstæðar tölur. Finnið fjölda minnisstæðra sjö tölustafa talna.

Svar: 25353

Skýring: Skiptum í tilvik:

(a) Gerum ráð fyrir að rita megi fyrstu þrjár tölurnar á forminu aaa.

  i. Ef fjórða talan er líka a þá er talan minnistæð hverjar svo sem næstu þrjár tölurnar eru. Það má velja a á 9 vegu og hverja hinna þriggja talnanna á 9 vegu hverja. Það eru því $9^4 = 6561$ minnisstæðar tölur á þessu formi.

ii. Gerum ráð fyrir að fjórða talan b sé frábrugðin a. Þá er talan minnisstæð ef og aðeins ef síðust þrjár tölurnar eru allar a. Það má velja a á 9 vegu og þar sem b er frá brugðin a þá má velja b á $9 - 1 = 8$ vegu. Það má því velja minnistæða tölu á þessu formi á $9 \cdot 8 = 72$ vegu.

Það eru því $6561 + 72 = 6633$ minnistæðar tölur sem byrja á aaa.

(b) Gerum ráð fyrir að rita megi fyrstu þrjár tölurnar á forminu aab þar sem a og b eru ólíkar.

Þá getur aab komið fyrir í fjórðu til sjöttu eða fimmtu til sjöundu tölu. Það getur ekki bæði gerst því þá væri sjötta talan bæði a og b. Í hvoru tilviki er frjálst val fyrir þá tölu sem eftir er. Það má velja a og b á $9 \cdot 8 = 72$ vegu og síðan má velja síðustu töluna á 9 vegu. Það eru tvö svona tilvik svo við fáum að það eru $2 \cdot 72 \cdot 9 = 1296$ minnistæðar tölur sem byrja á aab.

(c) Gerum ráð fyrir að rita megi fyrstu þrjár tölurnar á forminu abb. Rétt eins og í síðasta tilviki þá fæst að það eru $2 \cdot 72 \cdot 9 = 1296$ minnisstæðar tölur sem byrja á abb.

(d) Gerum ráð fyrir að rita megi fyrstu þrjár tölurnar á forminu aba þar sem a og b eru ólíkar tölur.

i. Séu fyrstu þrjár tölurnar eins og þriðja til fimmta talan þá er talan minnistæð hverjar sem síðustu tvær tölurnar eru. Það má velja a og b á $9 \cdot 8 = 72$ vegu og síðust tvær tölurnar á 9 vegu hvora það eru því $72 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$ minnistæðar tölur í þessu tilviki.

ii. Séu fyrstu þjár tölurnar eins og fjórða til sjötta talan þá eru fyrstu þrjár tölurnar ekki eins og þriðja til fimmta talan því fjórða talan er a. Það má þá velja síðustu töluna á 9 vegu. Það þýðir að það eru því $9 \cdot 8 \cdot 9 = 648$ minnistæðar tölur í þessu tilviki.

iii. Séu fyrstu þrjár tölurnar eins og fimmta til sjöunda talan þá má velja fjórðu töluna frjálst á 9 vegu. Í einu af þessu tilviki þá veljum við fjórðu töluna sem b og lendum því í tilvikinu $ababa$ að ofan en það hefur þegar verið talið. Við megum því velja fjórðu töluna á $9 - 1 = 8$ vegu til þess að forðast tvítalningu. Þetta tilvik gefur því $9 \cdot 8 \cdot 8 = 576$ nýjar minnistæðar tölur.

Við sjáum því að það eru $5832 + 648 + 576 = 7056$ minnisstæðar tölur sem byrja á aba.

(e) Gerum ráð fyrir að rita megi fyrstu þrjár tölurnar á forminu abc þar sem a, b og c eru ólíkar. Sé talan minnistæð þá eru fyrstu þrjár tölurnar eins og fjórða til sjötta talan eða fimmta til sjöunda en ekki bæði þar sem annars væri fimmta talan bæði a og b. Í báðum tilvikum er ein tala eftir sem má velja frjálst á 9 vegu. Velja má a, b og c ólíkar á $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ vegu. Það eru svo tvær leiðir til þess að samsvara fyrstu þrjár tölurnar við einhverjar aðrar þrjár tölur og síðan má velja síðustu tölurnar á 9 vegu. Það eru því $2 \cdot 504 \cdot 9 = 9072$ minnistæðar tölur á þessu formi.

Lesandi getur gengið úr skugga um að þetta eru öll tilvik sem komið geta upp. Við fáum því að það eru $6633 + 1296 + 1296 + 7056 + 9072 = 25353$ minnisstæðar tölur.

Fjórði hluti

21. Verslun selur epli í lokuðum pokum með 5, 8 eða 12 eplum. Ekki má opna poka til að breyta fjöldanum í pokanum. Hver er mesti fjöldi epla sem ekki er mögulegt að kaupa?

Lausn: Gerum ráð fyrir að n sé fjöldi epla sem við viljum kaupa. Vissulega má kaupa $n = 0$ epli með því að kaupa ekkert. Gerum ráð fyrir að $n > 0$. Þá má kaupa n epli ef og aðeins kaupa megi $n - 5$, $n - 8$ eða $n - 12$ epli þar sem að ef $n > 0$ þá þarf að kaupa einhvern poka og ef við teljum þann poka frá þá getum við keypt hin eplin með hinum pokunum. Rekjum okkur því upp með því að merkja o ef við getum keypt tiltekinn fjölda og x ef svo er ekki:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
o	x	x	x	x	o	x	x	o	x	o	x	o	o	x	o	o	o	o	x	o	o	o	o	o

Við sjáum því að við getum ekki keypt 19 epli en við getum keypt 20, 21, 22, 23 og 24 epli. Þá er ljóst að hvaða fjölda epla, meiri en 19, er hægt að kaupa; leggjum margfeldi af 5 epla poka við einhvern fjöldann 20-24.

22. Á hve marga vegu má raða níu ásum inn í venjulegt Sudoku?
Engir tveir ásar mega vera í sama dálki eða sömu línu, né í sama 3×3 ferningi með þykkri rönd. Dæmi um leyfilega uppröðun má sjá til hægri.

			1					
1								
								1
	1							
				1				
							1	
					1			
		1						
						1		

Lausn 1:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Við númerum 3×3 reitina frá 1 upp í 9 eins og á mynd til hægri. Setja má ás í fyrsta reitinn á 9 vegu. Sá ás útilokar eina línu í reit tvö og einn dálk í reit fjögur, í þeim reitum má velja ás á 6 vegu. Í reit fimm er þá búið að útiloka eina línu og einn dálk, sem skarast í einum reit, svo 4 reitir eru eftir sem koma til greina.
Í reitum þrjú og sex er búið að útiloka tvær línur, og því þrír möguleikar eftir í hvorum fyrir sig. Í reitum 7 og 8 er búið að útiloka tvo dálka, og því einnig 3 möguleikar í þessum reitum. í reit 9 er búið að útiloka tvær línur og tvo dálka, svo þar er aðeins 1 möguleiki.

Heildarfjöldi leiða til þess að fylla inn ásana er þá $9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 46656$.

Athugasemd: Í svona dæmum eru gefin full stig fyrir rétta tölu, t.d. $9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$ án þess að margfeldið sé reiknað út.

Lausn 2:

Ef settir eru ásar inn á borðið á leyfilegan máta, þá má merkja t.d. dálka 1-3 eftir því í hvaða 3×3 reit er ás í þeim dálki. T.d. ef ásinn í fyrsta dálknum er í miðreitnum þá merkjum við hann með 2, ef ásinn í næsta dálki er í neðsta reitnum merkjum við hann með 3 og ef ásinn í þriðja dálkinum er í efsta reitnum merkjum við hann með 1, eins og á mynd. Eins gerum við fyrir dálka 4-6 og 7-9, og svo eins fyrir línurnar.

	2	3	1	2	3	1	2	1	3
1			1						
2						1			
3								1	
1	1								
2				1					
3							1		
2					1				
1		1							
3									1

Öfugt, þá ef gefnar eru svona raðanir á þrenndum dálka og lína, þá getum við skrifað ásana inn út frá því á nákvæmlega einn hátt. Svo fjöldi leiða til þess að raða inn ásunum er $(3!)^6 = 6^6 = 46656$.