

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2006-2007 Efra stig

Nafn: _____

Kennitala: _____ Sími: _____

Heimilisfang: _____

Skóli: _____

Bekkur eða áfangi: _____

Námsár í framhaldsskóla: 1. 2. 3. 4.

| | |
|------|--|
| I | |
| II | |
| 16 | |
| 17 | |
| 18 | |
| 19 | |
| Alls | |

Leiðbeiningar:

- Opnið ekki spurningaheftið fyrr en ykkur er sagt að gera það.
- Færið inn allar upplýsingar sem beðið er um hér á undan áður en þið opnið heftið.
- Þetta er ekki venjulegt próf. Ekki er gert ráð fyrir að margir geti svarað öllum spurningunum. Þótt þið getið ekki svarað nema hluta þeirra, þá þarf það ekki að þýða að þið standið ykkur ekki vel. Sumar spurninganna eru mjög erfiðar.
- Keppnin er í þremur hlutum. Í fyrsta hluta eru tíu spurningar sem gilda þrjú stig hver; í öðrum hluta eru fimm spurningar sem gilda sex stig hver og í þriðja hluta eru fjórar spurningar sem gilda tíu stig hver. Hámarksfjöldi stiga er 100.
- Allar spurningar í fyrsta hlutanum eru krossaspurningar. Á eftir hverri spurningu eru fjögur hugsanleg svör. Aðeins eitt þeirra er rétt. Setjið kross í reitinn framan við rétta svarið. Ef þið getið ekki svarað spurningu, þá borgar sig yfirleitt ekki að giska á svarið, því að fyrir hvert rangt svar er dregið frá eitt stig.
- Í öðrum hluta á aðeins að tilgreina svör, en ekki sýna aðferðina sem notuð var. Svarið skal tilgreint á svarlínunni aftan við spurninguna. Fyrir rétt svar eru gefin sex stig, fyrir rangt svar, ófullkomið eða tvírætt svar er ekkert stig gefið.
- Í lausnum fjögurra síðustu dæmanna, í þriðja hluta, á að gera fullkomna grein fyrir hvernig svarið var fengið. Færið inn endanlega lausn, ekki krot sem á heima á rissblöðum. Við mat lausna er tekið tillit til nákvæmni í röksemdafærslu og skýrleika í framsetningu.
- Hjálparmyndir sem fylgja sumum dæmunum eru aðeins ætlaðar til skýringar. Ekki er víst að þær séu teiknaðar í réttum hlutföllum.
- Þið hafið nákvæmlega tvær og hálf klukkustund til að leysa verkefnið eftir að ykkur er leyft að byrja. **Notkun reiknivéla er óheimil.**

Glitnir styrkir Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar og er hver spurning þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

1. Hvað er $3 - (2 - (1 - (3 - (1 - 3))))$?

 -3

 -1

 0

 2

2. Tilttekið er margfeldið $37 \cdot 38 \cdot 39 \cdot 40$. Eina af tölunum fjórum má hækka um 1. Hvaða tölu á að hækka svo að margfeldið stækki sem mest?

 37

 38

 39

 40

3. Ferhyrningi er skipt í fjóra minni ferhyrninga eins og sýnt er á myndinni hér til hægri. Flatarmál þriggja af ferhyrningunum fjórum eru 4 cm^2 , 7 cm^2 og 15 cm^2 . Hvert er flatarmál fjórða ferhyrningsins, mælt í fersentimetrum?

| | |
|---|-----|
| 7 | 15 |
| 4 | x |

 $7/4$
 $30/4$
 $50/7$
 $60/7$

4. Í eftirfarandi jöfnu tákna bókstafirnir tölustafi í tugakerfinu. Fyrir hvaða tölustaf stendur M ?

$$4 \cdot KLMNP4 = 4KLMNP$$

 0

 1

 2

 3

5. Gefnir eru 8 einingateningar (teningar af stærð $1 \times 1 \times 1$). Allar 48 hliðar teninganna eru hvítmálaðar. Hver er minnsti fjöldi hliða sem þarf að mála svartar til þess að ómögulegt sé að raða einingatingunum í tening af stærð $2 \times 2 \times 2$ með allar sex hliðarnar hvítar?

 2

 3

 4

 6

6. Nákvæmlega $2/3$ drengjanna og nákvæmlega $3/4$ stúlkanna stóðust lokapróf í stærðfræði. Fjöldi drengja sem stóðst prófið er jafn fjölda stúlkna sem stóðst prófið. Hvaða hlutfall af öllum hópnum stóðst prófið?

$\frac{11}{16}$

$\frac{12}{17}$

$\frac{13}{18}$

$\frac{14}{19}$

7. N er jákvæð heiltala, $10 < N < 100$. Ef deilt er í N með 7 verður afgangurinn 3 og ef deilt er í N með 13 verður afgangurinn einnig 3. Hvert er margfeldi tölustafa tölunnar N ?

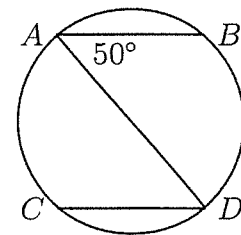
0

9

36

42

8. Í hringnum hér til hægri eru strikin AB og CD samsíða. Stikið AD er miðstrengur. Ef AD er 36 cm hversu langur er boginn AB í cm?



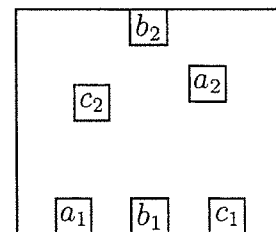
6π

7.2π

8π

9π

9. Reyna skal að tengja kassa a_1 við kassa a_2 , kassa b_1 við kassa b_2 og kassa c_1 við kassa c_2 með þremur ferlum sem ekki skerast og liggja innan stóra ferningsins. Hver af eftirfarandi fullyrðingum lýsir mögulegum tengingum? (sýnið svar á teikningu)



Hægt er að tengja b_1 við b_2 en ekki er samtímis hægt að tengja a_1 við a_2 eða c_1 við c_2 .

Hægt er að tengja b_1 við b_2 og c_1 við c_2 en ekki er samtímis hægt að tengja a_1 við a_2 .

Hægt er að tengja a_1 við a_2 og c_1 við c_2 en ekki samtímis hægt að tengja b_1 við b_2 .

Hægt er að tengja öll þrjú pörin samtímis.

10. Gefnar eru fjórar jákvæðar heiltölur a, b, c og d þannig að nákvæmlega ein af eftirfarandi fullyrðingum er röng. Hvaða fullyrðing er röng?

$a < b$

$c < d$

$a + c < b + c$

$a + c < b + d$

Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt, ófullkomið eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

11. Þríhyrningur hefur grunnlínu 10 cm og hæð 5 cm. Í þríhyrninginn er innritaður ferningur þannig að ein hlið ferningsins liggur á grunnlínu þríhyrningsins. Hvert er flatarmál ferningsins mælt í fersentimetrum?

Svar: _____

12. Lest ferðast milli tveggja bæja, A og B . Ef lestin fer á hraðanum 36 km/klst þá er hún 9 mínútum á eftir áætlun og ef hún ferðast á hraðanum 27 km/klst þá er hún 39 mínútum á eftir áætlun. Hver er fjarlægðin milli bæjanna A og B ?

Svar: _____

13. Anna, Bjarni og Dísu eru samanlagt með 270 krónur. Ef Bjarni léti Dísu fá helminginn af sínum peningum þá myndi Dísu eiga tvöfalt meira en Anna. Ef hins vegar Bjarni léti Önnu fá þriðjunginn af sínum peningum þá ættu Dísu og Anna sömu upphæð. Hversu mikla peninga er Anna með í krónum talið?

Svar: _____

14. Punktarnir A , B , C og D liggja á sléttu þannig að $AB = BC = AC = CD = 10$, $AD = 17$ og AC sker BD . Hver er stærð hornsins $\angle ADB$?

Svar: _____

15. Jón og Bjarni hlaupa á hringlaga braut. Báðir hlaupa á jöfnum hraða og er Jón 3 sekúndum á undan Bjarna að ljúka hringnum. Ef þeir félagar halda hlaupunum áfram þá fer Jón framúr Bjarna á 90 sekúndna fresti. Hve lengi er Bjarni að hlaupa einn hring?

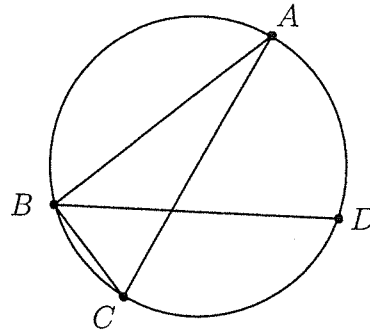
Svar: _____

Þriðji hluti

Í þessum hluta eru fjögur dæmi. Hvert dæmi er tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

16. Við segjum að náttúrleg tala sé *einlit* ef hana má rita með aðeins einum tölustaf. Dæmi um slíkar tölur eru 4, 55 og 11111. Einlita talan 11111 er ekki frumtala (prímtala) því að $11111 = 41 \cdot 271$. Hve margar frumtölur minni en 1.000.000 eru einlitar?

17. Fjórir punktar A, B, C og D liggja á hring þannig að er AC miðstrengur, AB er 4 cm, BC er 2 cm og hornin $\angle ABD$ og $\angle CBD$ eru jafn stór. Hver er lengd BD ?



18. Fyrir jákvæðar heiltölur $a, b > 0$ skilgreinum við aðgerð \diamond á eftirfarandi hátt:

$$a \diamond b = a^2 - b \diamond n,$$

þar sem n er fasti. Hvert er gildi $13 \diamond 17$ ef $16 \diamond 16 = 14$?

19. Á borði eru kassar af þremur stærðum: Stórir, meðalstórir og litlir. Stóru kassarnir eru 11 talsins og innihalda sumir þeirra 8 meðalstóra kassa hver. Sumir meðalstóru kassanna innihalda 8 litla kassa hver. 102 kassar á borðinu eru tómir. Hver er heildarfjöldi kassanna ?