

23. norræna stærðfræðikeppnin

Fimmtudaginn 2. apríl 2009

Íslensk útgáfa

Leyfilegur tími er 4 kukkustundir. Hvert dæmi er 5 stiga virði. Einu leyfilegu hjálpartækin eru skriffæri og teikniáhöld.

Dæmi 1

Valinn er punktur P inni í þríhyrningi. Dregnar eru þrjár línur gegnum P samsíða hliðum þríhyrningsins. Línurnar skipta þríhyrningnum í þrjá minni þríhyrninga og þrjá samsíðunga. Látum f vera hlutfallið milli samanlagðs flatarmáls minni þríhyrninganna og flatarmáls gefna þríhyrningsins. Sýnið að $f \geq \frac{1}{3}$ og ákvarðið fyrir hvaða punkta P gildir að $f = \frac{1}{3}$.

Dæmi 2

Á snjáðu blaði má með nokkurri fyrirhöfn greina eftirfarandi jöfnu:

$$(x^2 + x + a)(x^{15} - \dots) = x^{17} + x^{13} + x^5 - 90x^4 + x - 90.$$

Sumir hlutar jöfnunnar hafa máðst út og því vantar fastastuðulinn í fyrri þættinum vinstra megin og megnið af seinni þættinum. Hægt væri að ákvarða margliðuna sem myndar seinni þáttinn, en hér spyrjum við einungis: Hvert er gildi fastastuðulsins a ? Við gerum ráð fyrir að margliðurnar í jöfnunni hafi eingöngu heiltölustuðla.

Dæmi 3

Tölurnar 1, 2, 3, 4 og 5 eru skrifaðar á kritaertöflu. Leyfilegt er að stroka út tvær heiltölur a og b og setja í staðinn tölurnar $a + b$ og ab . Er mögulegt, með því að endurtaka þessa aðgerð, að komast í þannig stöðu að þrjár af tölunum fimm á töflunni séu jafnar 2009?

Dæmi 4

Haldið er mót þar sem þátt taka 32 keppendur. Engir tveir keppendanna eru jafnir að getu og í leik þar sem einn keppir við annan þá vinnur ávallt sá betri. Sýnið að finna megi í 39 leikjum hverjir eiga að fá gull-, silfur- og bronsverðlaun.