Líkanagerð fyrir árlega hámarkssólarhringsúrkomu

Óli Páll Geirsson[1], Birgir Hrafnkelsson[2]

Háskóli Íslands - [1]Raunvísindadeild, [2]Raunvísindastofnun

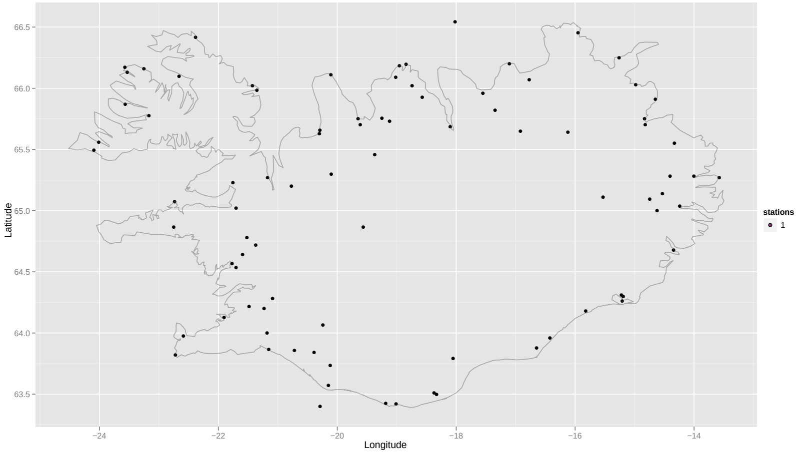
12. nóvember 2011

HÁSKÓLI ÍSLANDS

Inngangur

- Aðalmarkmiðið er að meta líkindadreifingu árlegrar hámarkssólarhringsúrkomu á fínu neti yfir Íslandi.
- Notumst við mælingar annars vegar og úttök úr loftslagslíkönum hins vegar.
- Þróuð er aðferð til að spá fyrir um sætistærðir hámarksúrkomu með því að sameina mælingar og úttök.
- Aðferðin er byggð á mælingum hámarkssólarhringsúrkomu frá 86 mælistöðvum á Íslandi (aðallega meðfram strandlengjunni) á tímabilinu 1961 til 2006. Loftslaglíkanið er þróað af Veðurstofu Íslands og það hermir daglega úrkomu á 1 km x 1 km neti yfir Ísland yfir 55 ára tímabil.

Mælistöðvar



Bayesísk tölfræði - örfá orð

- Látum y vera slembistærð (sem er venjulega í hlutverki gagna) með þéttifall $f(y|\theta)$, þ.e. þéttifall y er háð stikanum θ
- Gerum ráð fyrir að stikinn θ hafi sjálfur þéttifall $\pi(\theta)$ - sem er kallað *fyrirframþéttifall* θ
- Þá er hægt að *skilyrða stikann á gögnin* og fá *eftiráþéttifall* θ, nefnilega
$$\pi(\theta|y) = \frac{\pi(\theta)f(y|\theta)}{m(y)}$$
þar sem
$$m(y) = \int_{\Theta} \pi(\theta)f(y|\theta)d\theta$$

Stigskipt líkön - órfá orð

Í líkanagerð er gjarnan heppilegt að aðskilja *mælingar* og tilsvarandi *undirliggjandi ferli*.

Uppsetning:

- Mælingar | Ferli, Stikar
- Ferli | Stika
- Stikar

Markmiðið með stigskiptum líkönum er að sameina mæld gögn og aðra vísindalega þekkingu.

Almenna útgildisdreifingin ($\mathcal{G}.\mathcal{E}.\mathcal{V}.$) - nokkur orð

Setning (Fisher-Tippett-Gnedenko)

- Látum $X_1, \ldots, X_n$ vera einsdreifðar og óháðar slembistærðir og $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$
- Ef til eru stöðlunarfastar (a_n, b_n) þ.a.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) = F(x)$$

þá fæst, ef F er (óúrkynjað) dreififall, að F tilheyrir Gumbel, Fréchet eða Weibull fjölskyldu dreififalla.

- Þessar dreifingar eru sértilfelli almennu útgildisdreifingarinnar, táknuð með $\mathcal{G}.\mathcal{E}.\mathcal{V}.$, sem hefur dreififall á forminu

$$F(x) = exp\left\{ -\left(1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1/\xi}\right\}$$

fyrir $1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) > 0$, þar sem μ er staðsetningarstiki, $\sigma > 0$ er skölunarstiki og ξ er lögunarstiki.

- Lögunarstikinn ξ stjórnar lögun hala dreifingarinnar. Tökum eftir að $\xi = 0$ svarar til Gumbel, $\xi > 0$ svarar til Fréchet og $\xi < 0$ svarar til Weibull.

Líkanagerð

Við setjum fram stigskipt líkan til að lýsa gögnunum, þar sem við gerum ráð fyrir að líkindadreifing hámarksúrkomu á sérhverri mælistöð fylgi $\mathcal{G}.\mathcal{E}.\mathcal{V}.$ dreifingu. Látum y_{it} tákna árlega hámarkssólarhringsúrkomu á stöð i á ári t. Við gerum svo ráð fyrir að

$$y_{it} \sim \mathcal{G}.\mathcal{E}.\mathcal{V}.(\mu_{it}, \sigma_i, \xi) \qquad i = 1, \dots, J \quad t = 1, \dots, T$$

þar sem J er fjöldi stöðva, T er fjöldi ára, $\mu_{it} \in \mathbb{R}$, $\sigma_i > 0$ og $\xi \in \mathbb{R}$ eru staðsetningar, -skölunar- og lögunarstikar.

- μ_{it} háður tíma og rúmi
- σ_i háður rúmi - við munum vinna með $\tau_i := \log \sigma_i$
- ξ óþekktur fasti

Við setjum fram eftirfarandi líkan fyrir μ_{it}

$$\mu_{it} = \eta_i + \gamma_t \quad \text{þar sem} \quad \eta_i = x_i\beta_\mu + \epsilon_i, \quad \gamma_t = \beta_\gamma(t - t_0) + z_t$$

þar sem

- η_i er rúmþáttur stöðvar i, γ_t er tímaþáttur árs t
- x_i er vigur skýribreyta á stöð i, β_μ er vigur óþekktra fasta og ϵ_i er normaldreift frávik með væntigildi núll sem er breytilegt í rúmi
- β_γ er árleg aukning/minnkun árlegrar hámarkssólarhringsúrkomu, t_0 er miðgildi ára og z_t er normaldreift frávik með væntigildi núll innan árs t

Sambærilegt líkan er lagt til fyrir τ_i nema án tímaþáttar .

Skýribreytur

Skýribreytur líkansins fyrir η_i eru

- $x_{\eta(1,i)}$ er 1 fyrir öll i,
- $x_{\eta,(2,i)}$ er miðjuð breiddargráða fyrir stöð i
- $x_{\eta,(3,i)}$ er úttak loftslagslíkansins [1] sem svarar til stöðvar i - þ.e.a.s. meðaltöl hermdar úrkomu yfir tímabilið 1961-2006.

Skýribreytur líkansins fyrir τ_i eru

- $x_{\tau,(1,i)}$ er 1 fyrir öll i,
- $x_{\tau,(2,i)}$ náttúrulegi lógaritminn af $x_{\eta,(3,i)}$

Fyrirframdreifingar í stigskiptu líkani

Við gerum ráð fyrir eftirfarandi fyrirframdreifingum

$$\boldsymbol{\eta} \sim \mathcal{N}(X_\mu \boldsymbol{\beta}_\eta, \Sigma_\eta), \quad \boldsymbol{\gamma} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_\gamma)$$
$$\boldsymbol{\tau} \sim \mathcal{N}\left(X_\tau \boldsymbol{\beta}_\tau, \Sigma_\tau\right), \quad \boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\beta_\xi, \sigma_\xi^2)$$

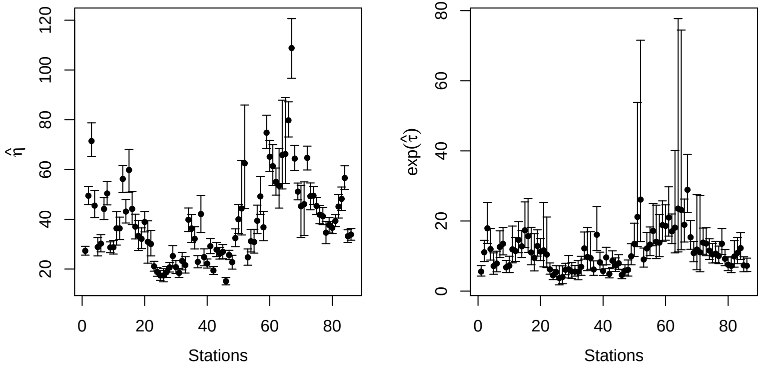
þar sem samfylgnifylkin eru á forminu

$$\{\Sigma_\eta\}_{ij} = \sigma_\eta^2 \exp(-\phi_\eta d_{ij}) \qquad \{\Sigma_\gamma\}_{rs} = \sigma_\gamma^2 \exp(-\phi_\gamma |t_r - t_s|)$$
$$\{\Sigma_\tau\}_{ij} = \sigma_\tau^2 \exp(-\phi_\tau d_{ij})$$

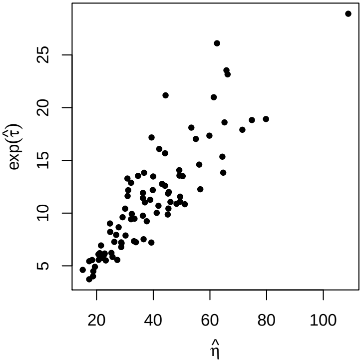
þar sem d_{ij} táknar fjarlægð í rúmi (í kílómetrum) og $|t_r - t_s|$ er fjarlægð í tíma (í árum).
Öðrum stikum er úthlutað samoka fyrirframdreifingum.

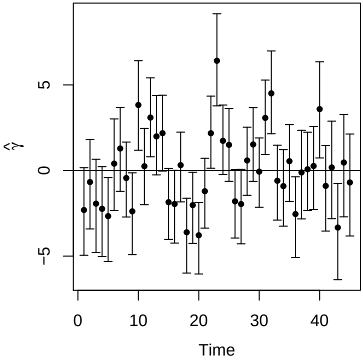
Eftirágreining

Gibbs hermun er notuð (með mörgum Metropolis–Hastings skrefum) til að fá eftirámöt á stikum líkansins. Eftirfarandi eftirámöt fengust fyrir stikana η og $\sigma = \exp \tau$

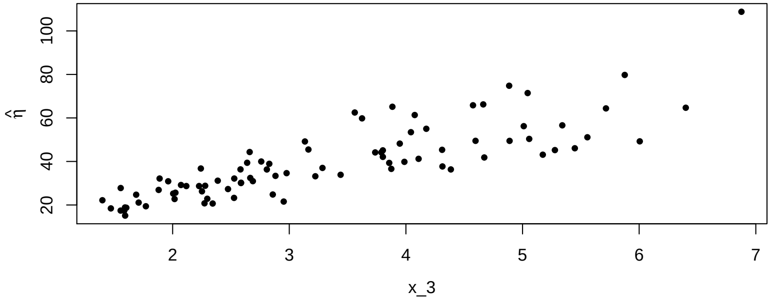


Eftirámöt fyrir η, σ and γ.





Þegar eftirámat η er teiknað upp sem fall af $(x_{\eta,(3,.)})$ sést sterk fylgni milli þeirra.



Eftirámat á öðrum stikum

Eftirámöt á öðrum stikum líkansins

Stiki	2.5%	meðalgildi	97.5%
ξ	0.01	0.08	0.16
$\beta_{\mu,1}$:	-6.00	0.35	6.44
$\beta_{\mu,2}$: (miðjuð breiddargráða)	-1.19	2.55	6.24
$\beta_{\mu,3}$: (hermd meðalgildi)	10.01	11.78	13.62
β_{γ}	-0.59	0.03	0.65
$\beta_{\tau,1}$:	1.12	1.41	1.67
$\beta_{\tau,2}$: (hermd meðalgildi)	0.59	0.80	1.03

Brúun í rúmi - Kriging

Tölfræðileg aðferð, sem kölluð er Kriging, er notuð til að meta stika líkindadreifingar hámarksúrkomu á neti loftslagslíkansins.
Fyrir η á ómældum stöðum, táknað η_{un} höfum við

$$\eta_{un} \sim \mathcal{N}\left(\eta_{2|1} | \Sigma_{22|1}\right)$$

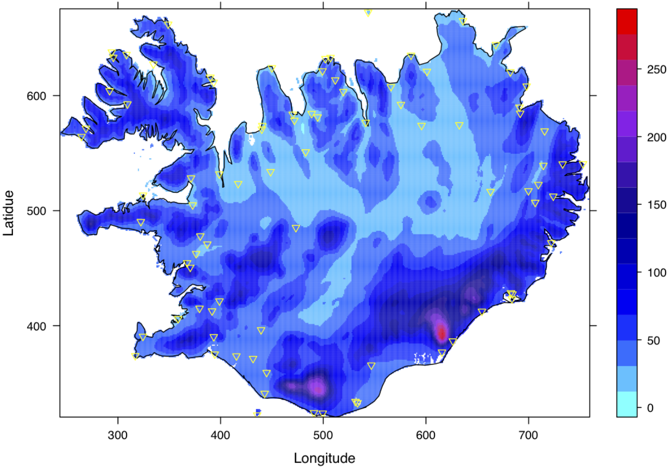
þar sem

$$\eta_{2|1} = X_{\eta,un}\hat{\beta}_\eta + \Sigma_{21}\Sigma_\mu^{-1}\left(\hat{\eta} - X_{\eta,un}\hat{\beta}\right)$$
$$\Sigma_{22|1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_\mu^{-1}\Sigma_{21}$$

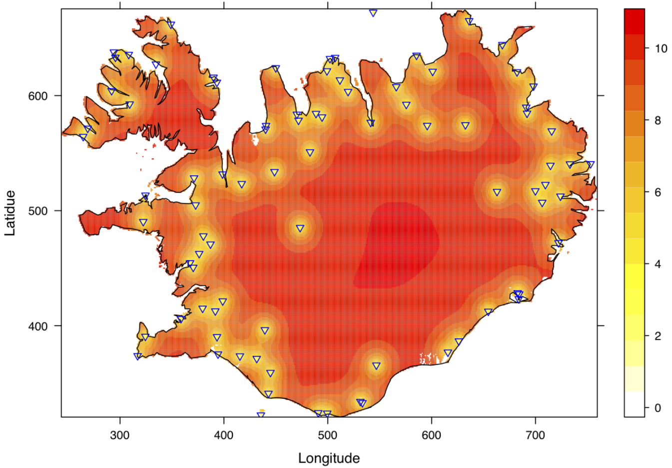
þar sem Σ_{22} er samfylgnifylki fyrir η á ómældum punktum netsins og Σ_{21} er samfylgnifylki fyrir η milli ómælda punkta og mælistöðva.
Sambærileg aðferð er notuð fyrir τ.

Rúmspá

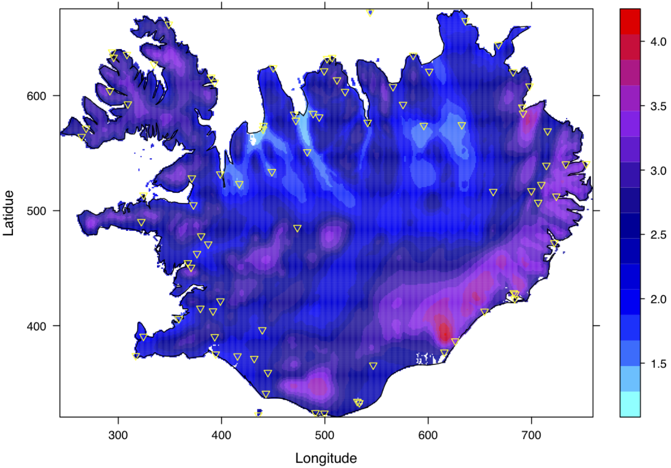
Rúmspá fyrir η í $\mathcal{G}.\mathcal{E}.\mathcal{V}$ dreifingunni byggð á eftirámötum stikanna og skýribreytum á ómældum stöðum á Íslandi



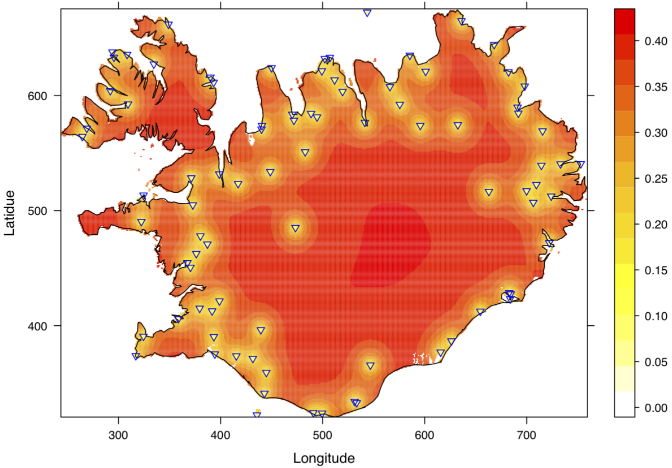
Staðalfrávik rúmspáar μ_i



Rúmspá fyrir τ_i



Staðalfrávik rúmspáar τ_i

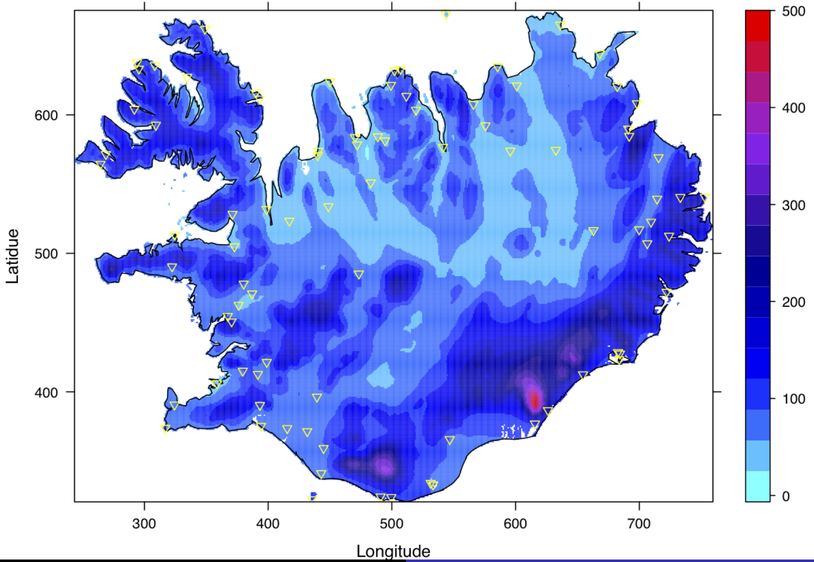


Sætisstærðarmöt

- Þegar við höfum rúmspárnar η_{un} og τ_{un} þá höfum við mat á líkindadreifingu árlegra hámarkssólarhringsúrkomu í sérhverjum punkti netsins (því við höfum mat á stikum $\mathcal{G}.\mathcal{E}.\mathcal{V}.$ dreifingarinnar).
- Sér í lagi getum við fengið mat á p-tu sætisstærð dreifingarinnar í sérhverjum punkti. Við fáum

$$y_{p,un,j,t} = \eta_{un,j} + \gamma_t + \frac{exp(\tau_{un,j})}{\hat{\xi}} \left(- \log(p)^{-\hat{\xi}} - 1 \right)$$

Mat á 95-tu sætisstærðinni



Áframhaldandi rannsóknir

- Vegna eðli hámarksúrkomu virðist eðlilegt að notast við líkan sem leyfir að hafa mælingar háðar í rúmi. Til þess má nota svokallaðar kopúlur.
- Lítið merki fékkst fyrir tímabreytuna. Annað líkan fyrir tíma er líklega við hæfi (frekar en AR(1) líkanið sem notast var við).
- Skoða mánaðarleg hágildi í stað fyrir árleg.
- Önnur samfylgnifylki eru venjulega notuð í rúmtölfræði. T.d. samfylgnifylki sem byggð eru á Matérn - samfylgnifallinu.
- Mikil áskorun að leysa þetta verkefni tölulega. Til eru aðrar aðferðir til að finna eftirámöt á stikum í ýmsum líkönum. Ein þeirra heitir INLA (fyrirlestur í VR-II þann 24. nóvember nk.)

Heimildarskrá

1. Crochet, P., T. Jóhannesson, T. Jónsson, O. Sigurðsson, H. Björnsson, F. Pálsson and I. Barstad (2007): *Estimating the spatial distribution of precipitation in Iceland using a linear model of orographic precipitation*. J. of Hydrometeorol., Vol. 8 (6), 1285-1306.
2. Hrafnkelsson, B., Morris J. S. and Baladandayuthapani V. (2011) Spatial modeling of annual minimum and maximum temperatures in Iceland. *Meteorology and Atmospheric Physics*, to appear.
3. Banerjee, Carlin, Gelfand. (2004). *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data*. Chapman & Hall/CRC.
4. Sang, H. Y. and Gelfand A. E. (2009) Hierarchical modeling for extreme values observed over space and time. *Environmental and ecological statistics*, 16, 407-426.