Eiginleikar CARMA líkana (Continuous-time-Auto-Regressive-Moving-Average)

Helgi Tómasson, helgito@hi.is
Hagfræðideild HÍ
Stærðfræði á Íslandi
Reykholt, 12-13. nóvember, 2011.

Skiplag fyrirlestrar

- Hvað er CARMA?
- Helstu eiginleikar.
- Tölfræðilegt mat.
- Ýmis reiknifræðileg vandamál.
- Hiti á jörðinni, sýnidæmi.
- Lokaorð

Sjónhverfing: Enska biskupakirjan stórhættuleg.

-

Sjónhverfing: Enska biskupakirjan stórhættuleg.

- Englendingar hafa langa menningarsögu

Sjónhverfing: Enska biskupakirjan stórhættuleg.

- Englendingar hafa langa menningarsögu
- Virðulegar gamlar stofnanir, til dæmis landlæknisembætti og Ensku kirkjuna.

Sjónhverfing: Enska biskupakirjan stórhættuleg.

- Englendingar hafa langa menningarsögu
- Virðulegar gamlar stofnanir, til dæmis landlæknisembætti og Ensku kirkjuna.
- Þessar stofnanir safna vönduðum mælingum.

Sjónhverfing: Enska biskupakirjan stórhættuleg.

- Englendingar hafa langa menningarsögu
- Virðulegar gamlar stofnanir, til dæmis landlæknisembætti og Ensku kirkjuna.
- Þessar stofnanir safna vönduðum mælingum.
- Til dæmis hefur landlæknisembættið safna gögnum um „mortalitet", dánir á ári per 1000 íbúa og kirkjan hefur talið hver mörg hjónabönd á ári per 1000 hjónabönd eru á vegum kirkjunnnar.

Sjónhverfing: Enska biskupakirjan stórhættuleg.

- Englendingar hafa langa menningarsögu
- Virðulegar gamlar stofnanir, til dæmis landlæknisembætti og Ensku kirkjuna.
- Þessar stofnanir safna vönduðum mælingum.
- Til dæmis hefur landlæknisembættið safna gögnum um „mortalitet", dánir á ári per 1000 íbúa og kirkjan hefur talið hver mörg hjónabönd á ári per 1000 hjónabönd eru á vegum kirkjunnnar.
- Hver skyldu tengsl þessara hagstærða vera?

Sjónhverfing: Enska biskupakirjan stórhættuleg.

- Englendingar hafa langa menningarsögu
- Virðulegar gamlar stofnanir, til dæmis landlæknisembætti og Ensku kirkjuna.
- Þessar stofnanir safna vönduðum mælingum.
- Til dæmis hefur landlæknisembættið safna gögnum um „mortalitet", dánir á ári per 1000 íbúa og kirkjan hefur talið hver mörg hjónabönd á ári per 1000 hjónabönd eru á vegum kirkjunnnar.
- Hver skyldu tengsl þessara hagstærða vera?
- Reiknum fylgnistuðul og fáum:

Sjónhverfing: Enska biskupakirjan stórhættuleg.

- Englendingar hafa langa menningarsögu
- Virðulegar gamlar stofnanir, til dæmis landlæknisembætti og Ensku kirkjuna.
- Þessar stofnanir safna vönduðum mælingum.
- Til dæmis hefur landlæknisembættið safna gögnum um „mortalitet", dánir á ári per 1000 íbúa og kirkjan hefur talið hver mörg hjónabönd á ári per 1000 hjónabönd eru á vegum kirkjunnnar.
- Hver skyldu tengsl þessara hagstærða vera?
- Reiknum fylgnistuðul og fáum:
  Svar: 0.95

Sjónhverfing: Enska biskupakirjan stórhættuleg.

- Englendingar hafa langa menningarsögu
- Virðulegar gamlar stofnanir, til dæmis landlæknisembætti og Ensku kirkjuna.
- Þessar stofnanir safna vönduðum mælingum.
- Til dæmis hefur landlæknisembættið safna gögnum um „mortalitet", dánir á ári per 1000 íbúa og kirkjan hefur talið hver mörg hjónabönd á ári per 1000 hjónabönd eru á vegum kirkjunnnar.
- Hver skyldu tengsl þessara hagstærða vera?
- Reiknum fylgnistuðul og fáum:
  Svar: 0.95
- Ályktum, **sterkt samband** eða jafnvel **sterkt marktækt samband** milli markaðshlutdeildar kirkjunnar í brúðkaupum og „mortalitets".

Varúð:
Hugtakið marktækt hefur ekkert með mikilvægi að gera.

Varúð:
Hugtakið marktækt hefur ekkert með mikilvægi að gera.

Marktækt þýðir eingöngu:$p < \alpha$, þar sem p þýðir líkur á fenginni útkomu eða ótrúlegri gefið að tiltekið tölfræðilegt líkan sé rétt.

Varúð:
Hugtakið marktækt hefur ekkert með mikilvægi að gera.

Marktækt þýðir eingöngu:$p < \alpha$, þar sem p þýðir líkur á fenginni útkomu eða ótrúlegri gefið að tiltekið tölfræðilegt líkan sé rétt.

Ekkert vit í gagnagreiningu (ályktunum) án tölfræðilegs líkans.
Ég tel fullt vit í reikningshaldi/bókhaldi/bókasafnsfræði og annari skráningu staðreynda.

Varúð:
Hugtakið marktækt hefur ekkert með mikilvægi að gera.

Marktækt þýðir eingöngu:$p < \alpha$, þar sem p þýðir líkur á fenginni útkomu eða ótrúlegri gefið að tiltekið tölfræðilegt líkan sé rétt.

Ekkert vit í gagnagreiningu (ályktunum) án tölfræðilegs líkans. Ég tel fullt vit í reikningshaldi/bókhaldi/bókasafnsfræði og annari skráningu staðreynda.

Í þessum útreikningi hefur það gleymst að gögnin eru tímaraðir og því kallar tölfræðileg greining á tímaraðalíkön/tímaraðaaðferðir

Varúð:
Hugtakið marktækt hefur ekkert með mikilvægi að gera.

Marktækt þýðir eingöngu:$p < \alpha$, þar sem p þýðir líkur á fenginni útkomu eða ótrúlegri gefið að tiltekið tölfræðilegt líkan sé rétt.

Ekkert vit í gagnagreiningu (ályktunum) án tölfræðilegs líkans.
Ég tel fullt vit í reikningshaldi/bókhaldi/bókasafnsfræði og annari skráningu staðreynda.

Í þessum útreikningi hefur það gleymst að gögnin eru tímaraðir og því kallar tölfræðileg greining á tímaraðalíkön/tímaraðaaðferðir

Mjög mikið af haggögnum eru tímaraðir.

Hvað er CARMA

- Samfelld tímaútgáfa af ARMA
- Hvað er ARMA? Einfaldasta útgáfan er AR(1)

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad E(\varepsilon_t) = 0, \quad V(\varepsilon_t) = \sigma^2,$$
$$\Delta Y_t = (Y_t - Y_{t-1}) = (\phi - 1)Y_{t-1} + \varepsilon.$$

- Reiknireglur um random vectora (X), $E(A\boldsymbol{X}) = AE(\boldsymbol{X})$ og $V(A\boldsymbol{X}) = AV(\boldsymbol{X})A'$.
- Fyrir AR(1) er

$$E(Y_t|Y_{t-1}) = \phi Y_{t-1}, \quad V(Y_t|Y_{t-1}) = \sigma^2,$$
$$E(Y_t) = 0, \quad V(Y_t) = \phi^2 V(Y_t) + \sigma^2,$$
$$V(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}, \ \text{ef } |\phi| < 1.$$

Hvað eru ARMA og CARMA?

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$
$$E(\varepsilon_t) = 0, \quad E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2.$$

- Þetta er ARMA(p,q) líkan, ε_t er kallað „white-noise".
- Einföld leið til að grípa hreyfimynstur
- Fræg kokkabók er Box & Jenkins (1976) sem gerði ARMA líkön aðgengileg í hagnýtum rannsóknum.
- Hreyfimynstur ARMA líkans byggist á mismunajöfnu (difference equation). Túlkun stuðlanna í tenglsum við undirliggjandi samfellt ferli er ekki auðvelt. Phadke & Wu (1974) gefa sýnidæmi fyrir ARMA(2,1)

Hvað eru ARMA og CARMA?

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$
$$E(\varepsilon_t) = 0, \quad E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2.$$

- Þetta er ARMA(p,q) líkan, ε_t er kallað „white-noise".
- Einföld leið til að grípa hreyfimynstur
- Fræg kokkabók er Box & Jenkins (1976) sem gerði ARMA líkön aðgengileg í hagnýtum rannsóknum.
- Hreyfimynstur ARMA líkans byggist á mismunajöfnu (difference equation). Túlkun stuðlanna í tenglsum við undirliggjandi samfellt ferli er ekki auðvelt. Phadke & Wu (1974) gefa sýnidæmi fyrir ARMA(2,1)

Með því að draga Y_{t-1} frá skilgreiningunni á ARMA(p,q), þá er hægt að skrifa:

$$\Delta^p Y_t + \tilde{\phi}_1 \Delta^{p-1} Y_t + \cdots + Y = \varepsilon_t + \cdots$$
$$\Delta = \text{ mismunar operator }, \quad \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}.$$

Við viljum skilgreina útgáfu í samfelldum tíma:

$$Y^{(p)}(t) + \alpha_1 Y^{(p-1)}(t) + \cdots + \alpha_p Y(t) =$$
$$\sigma \, \mathrm{d}(W(t) + \beta_1 W^{(1)}(t) + \cdots \beta_q W^{(q)}(t)).$$

Hér táknar $Y^{(p)}(t)$ p-tu afleiðu ferlisins $Y(t)$. $\mathrm{d}W(t)$ er „white-noise" í samfelldum tíma.

Stærðfræðilega er $\mathrm{d}W(t)$ ekki til, og þaðan af síður hærri afleiður. Þess vegna er þetta fyrst og fremst formlega skilgreining á CARMA(p,q). CARMA ferlið er vel skilgreint. Fyrstu p afleiður CARMA ferlisins $Y(t)$ eru til, þ.e. braut $Y(t)$ er slétt..

- E.g., the CAR(1) process, (Ornstein-Uhlenbeck):

$$\mathrm{d}Y(t) = -\alpha Y(t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t), \quad \text{implies}$$
$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} (-\alpha Y(s)\,\mathrm{d}s + \sigma\,\mathrm{d}W(s))$$

Þ.e. $Y(t)$ er integral (summa), brautin er því slétt.

Um state-space framsetningu

Hugsum okkur 2-gráðu línulega diffurjöfnu:

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = 0, \quad \text{má skrifa sem}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix}$$

$$z'(t) + Az(t) = 0, \qquad \text{með}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$z'(t) + Az(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x'(t) \\ a_2 x(t) + a_1 x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

State space framsetning ARMA(p,q)

Set $\boldsymbol{\beta} = (1, \theta_1, \ldots, \theta_q)$ og

$$\boldsymbol{X}_t = \begin{bmatrix} X_{t-p+1} \\ X_{t-p+2} \\ \vdots \\ X_t \end{bmatrix}, \quad T_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \phi_p & \phi_{p-1} & \phi_{p-2} & \cdots & \phi_1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{R} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]'$$

$$\boldsymbol{X}_{t+1} = T\boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{R}\varepsilon_{t+1}, Y_t = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}_t$$

$$\Delta\boldsymbol{X}_{t+1} = \boldsymbol{X}_{t+1} - \boldsymbol{X}_t = (T - I)\boldsymbol{X}_t + \text{noise} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_t + \text{noise}$$

$$Y_t = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}_t$$

sjá t.d., (Brockwell & Davis, 1991) kafli 12. Y_t er hið mælda ferli.

State-space framsetning CARMA(p,q)

$$Y(t)^{(p)} + \alpha_1 Y(t)^{(p-1)} + \cdots + \alpha_p Y(t) =$$
$$\sigma(W(t)^{(1)} + \beta_1 W(t)^{(2)} + \cdots + \beta_q W(t)^{(q)})$$

Hvað þýðir þetta?

.

State-space framsetning CARMA(p,q)

$$Y(t)^{(p)} + \alpha_1 Y(t)^{(p-1)} + \cdots + \alpha_p Y(t) =$$
$$\sigma(W(t)^{(1)} + \beta_1 W(t)^{(2)} + \cdots + \beta_q W(t)^{(q)})$$

Hvað þýðir þetta? Á state-space formi

.

State-space framsetning CARMA(p,q)

$$Y(t)^{(p)} + \alpha_1 Y(t)^{(p-1)} + \cdots + \alpha_p Y(t) =$$
$$\sigma(W(t)^{(1)} + \beta_1 W(t)^{(2)} + \cdots + \beta_q W(t)^{(q)})$$

Hvað þýðir þetta? Á state-space formi

$$Y(t) = \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{X}(t)$$
$$d\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \sigma \boldsymbol{R} dW(t)$$
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_p & -\alpha_{p-1} & \cdots & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ X(t)^{(1)} \\ \vdots \\ X(t)^{(p-2)} \\ X(t)^{(p-1)} \end{bmatrix}$$

.

State-space framsetning CARMA(p,q)

$$Y(t)^{(p)} + \alpha_1 Y(t)^{(p-1)} + \cdots + \alpha_p Y(t) =$$
$$\sigma(W(t)^{(1)} + \beta_1 W(t)^{(2)} + \cdots + \beta_q W(t)^{(q)})$$

Hvað þýðir þetta? Á state-space formi

$$Y(t) = \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{X}(t)$$
$$d\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \sigma \boldsymbol{R} dW(t)$$
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_p & -\alpha_{p-1} & \cdots & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ X(t)^{(1)} \\ \vdots \\ X(t)^{(p-2)} \\ X(t)^{(p-1)} \end{bmatrix}$$

State-space framsetning á CARMA(p,q) ferlinu, $Y(t)$.

State-space framsetning CARMA(p,q)

$$Y(t)^{(p)} + \alpha_1 Y(t)^{(p-1)} + \cdots + \alpha_p Y(t) =$$
$$\sigma(W(t)^{(1)} + \beta_1 W(t)^{(2)} + \cdots + \beta_q W(t)^{(q)})$$

Hvað þýðir þetta? Á state-space formi

$$Y(t) = \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{X}(t)$$
$$d\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \sigma \boldsymbol{R} dW(t)$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_p & -\alpha_{p-1} & \cdots & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ X(t)^{(1)} \\ \vdots \\ X(t)^{(p-2)} \\ X(t)^{(p-1)} \end{bmatrix}$$

State-space framsetning á CARMA(p,q) ferlinu, $Y(t)$.
Þessi framsetning er byggð á Tsai & Chan (2000)

Hreyfimynstur statevectorsins, $\boldsymbol{X}(t)$:

$$d\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \sigma \boldsymbol{R} dW(t)$$

er margvíð línuleg SDE sem er auðvelt að leysa.

$$\boldsymbol{X}(t) = \underbrace{\exp_M^{\boldsymbol{A}(t-t_0)} \boldsymbol{X}(t_0)}_{\text{spáð ástand}} + \underbrace{\sigma \int_{t_0}^{t} \exp_M^{A(t-u)} \boldsymbol{R} dW(u)}_{\text{hið óvænta}}$$

- Ferlið er sístætt (stationary) ef eigingildi A hafa neivkæðan rauntöluhluta.
- Variance fylki hins óvænta, $V_{t|t_0}$ leysir þetta jöfnukerfi:

$$AV_{t|t_0} + V_{t|t_0}A' = \sigma^2(\exp_M^{A(t-t_0)} \boldsymbol{RR'} \exp_M^{A'(t-t_0)} - \boldsymbol{RR}'),$$

$$V_\infty = \lim_{t\to\infty} V_{t|t_0}.$$

Ef eigingildi A hafa neikvæðan rauntöluhluta fæst jöfnukerfi á fylkjaformi:

$$AV_\infty + V_\infty A' = -\sigma^2 \boldsymbol{RR}'.$$

Með því að beita reglu um Kronecker fylkjamargföldun:

$$\mathrm{vec}(ABC) = (C' \otimes A)\,\mathrm{vec}(B),$$

á

$$AV_\infty I \text{ and } IV_\infty A',$$

fæst

$$(I \otimes A)\,\mathrm{vec}(V_\infty) + (A \otimes I)\,\mathrm{vec}(V_\infty) = -\sigma^2\,\mathrm{vec}(\boldsymbol{RR}').$$

Þetta er p^2 vítt jöfnukerfi með p óþekktum.Tsai & Chan (2000) sýna algorithma sem umbreytir þessu í vandamál með p jöfnum.

Ef kerfið er stationary (eigingildi A hafa neikvæðan rauntöluhluta) þá eru tengsl V_∞ og $V_{t|t_0}$:

$$V(\boldsymbol{X}(t)) = V(\underbrace{\exp_M^{\boldsymbol{A}(t-t_0)} \boldsymbol{X}(t_0)}_{\text{spáð ástand}}) + V(\underbrace{\sigma \int_{t_0}^{t} \exp_M^{A(t-u)} \boldsymbol{R} dW(u)}_{\text{hið óvænta}})$$

$$V_\infty = \exp(A(t-t_0))V_\infty \exp(A(t-t_0))' + V_{t|t_0}.$$

Ef fyrir liggja gögn $y(t_1), \ldots, y(t_n)$ og gildi á $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ og $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_q)$, má setja upp Kalman-filter algoritmann og reikna likelihood-fallið:

$$L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma | y(t_1), \ldots, y(t_n)).$$

Hámörkum með númeriskum aðferðum gefur ML-mat á $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma)$

Mörg númerísk vandamál.

- T.d. hámörkun með hliðarskilyrðinu, *eigingildi A hafa neikvæðan rauntöluhluta*.
- Ég hef fundið tvær nothæfar lausnir.
- Routh-Hurwitz 100 ára algoritmi sem tékkar A ekki nothæfur. Prófa og tékka með númerikk ekki heldur.
- Lausnirnar eru a) blanda discrete-tíma aðferð og „þekktu falli úr complexri analýsu, b) eiginleiki Durbin-Levinson algorithma í samfelldum tíma.

Í discrete tíma þarf að velja $(\phi_1, \ldots, \phi_p)$ þannig að

$\phi(z) = 1 + \phi_1 z + \cdots + \phi_p z^p$ hafi engar rætur innan einingarhrings, eða

$z^p \phi(1/z)$ hafi engar rætur utan einingarhrings

1. Finn 1-1 vörpun sem varpar
   $(r_1, \ldots, r_p)$, $r_i \in (-1, 1)$ yfir í lögleg $(\phi_1, \ldots, \phi_p)$
2. Tek ræturnar í $z^p \phi(1/z)$, $(z_1, \ldots, z_p)$, (ath. $|z_i| < 1$), og varpa þeim yfir neikvæða hálfplanið með:
   $$w_i = -\frac{1 - z_i}{1 + z_i},$$
3. nota síðan w_i til að búa til p gráðu margliðu:
   $$\alpha(z) = z^p + \alpha_1 z^{p-1} + \cdots + \alpha_{p-1} z + \alpha_p.$$

- $\alpha(z)$ er kennimargliða (characteristic polynomial) fyrir companion fylkið A.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_p & -\alpha_{p-1} & \cdots & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

- r_i eru „partial-auto-correlation"stuðlar AR(p) ferils með stuðla $(\phi_1, \ldots, \phi_p)$. Þau má finna með Durbin-Levinson algorithmanum. (Aðrar leiðir, Samulson(1941), algebru-Þjóðverjar ca. 1920).
- Vekur upp hugmynd að beinu áhlaupi fyrir CARMA tilfellið. Finn 1-1 vörpun $(\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$ yfir í $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, þar sem $\gamma_i > 0$. Þ.e. nota einhvers konar Durbin-Levinson algortima fyrir samfelldan tíma.
- Gefur aðra leið á að halda neikvæðum rauntöluhluta eigingilda A. Þ.e.

$$\max_{\gamma_i > 0} L(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, |y(t_1), \ldots, y(t_n)).$$

- Nota svipaðar varpanir fyrir β.
- Varpanirnar má skrifa ýmsan hátt sem rekúrsívar formúlur.

- Ýmis önnur númerísk vandamál. T.d. matrix-exponent fallið.
- Þegar eigingildi A eru nægilega ólík má spara tíma í Kalman-filter skrefunum með því að vinna með complexar tölur.

$$\begin{aligned}
&Y(t) = \beta' \boldsymbol{X}(t), \\
&\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \sigma \boldsymbol{R}\,\mathrm{d}W(t), \\
&\text{ má umskrifa með } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{C}^*, \delta' = \beta'\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{I}, \\
&\boldsymbol{Z}(t) = \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{\Lambda} \text{ diagonal}, \\
&Y(t) = \delta' \boldsymbol{Z}(t), \\
&\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t) = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Z}(t) + \mathit{noise}.
\end{aligned}$$

Get notað venjulegt exp-fall. Ef munur á eigingildum lítill ($< 10^{-8}$), nota standard uppsetningu á state-space og sérstakt matrix-exponential fall.

Um auto-covariance og spectrum

- $\gamma(\tau) = E(Y(t)Y(t-\tau)$ sem fyrir CARMA $=$

  $\boldsymbol{\beta}' V_\infty \exp_M(A|\tau|)\boldsymbol{\beta}$

- Spectrum fyrir stationary ferli er:

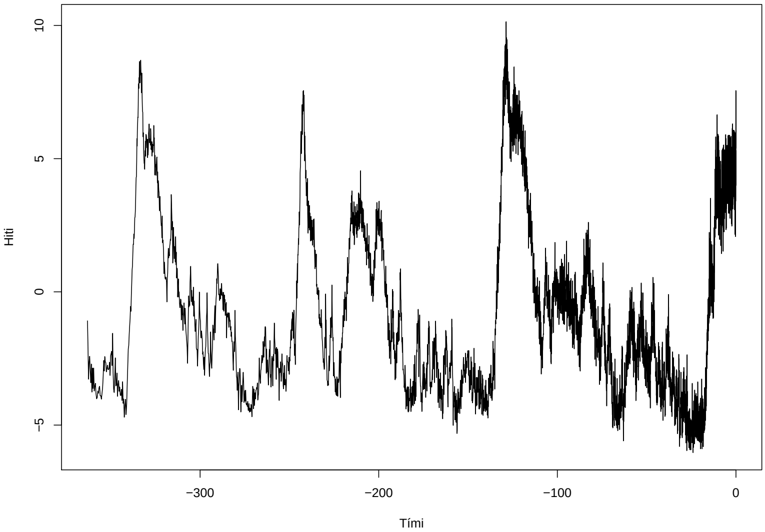
$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\gamma(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

- Sem fyrir CARMA er:

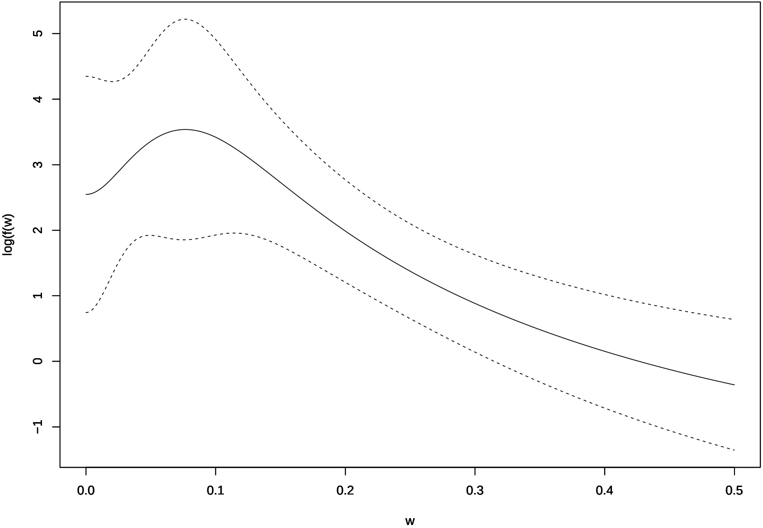
$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{\alpha(i\omega)\alpha(-i\omega)}{\beta(i\omega)\beta(-i\omega)},$$

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{i\omega|\tau|}\,\mathrm{d}\omega = 2\pi\sum_{\lambda} Res_{z=\lambda}(f(z)e^{z|\tau|}).$$

Þróun hitastigs á Jörðinni



Log−spectrum of an estimated CARMA(8,7)



Lokaorð

- Líkanagerði í samfelldum tíma praktískt möguleg.
- Parametrar líkans ekki háðir þéttni mælinga. Mælingar mega vera óreglulegar.
- Margar útvíkkanir, aðrar dreifingar (ekki Wiener/Brownian ferli), hægari decay en exponential, multivariate, o.s.frv.
- Mörg númerísk vandamál við CARMA.
- Aðferðir mínar eru í *ctarma* pakkanum í R.

Box, G. E. P. & Jenkins, G. M. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden Day, San Fransisco.

Brockwell, P. J. & Davis, R. A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag.

Phadke, M. & Wu, S. (1974). Modeling of continuous stochastic processes from discrete observations with application to sunspots data. *Journal of the American Statistical Association*, *69*(346), 325–329.

Tsai, H. & Chan, K. (2000). A note on the covariance structure of a continuous-time ARMA process. *Statistica Sinica*, *10*, 989–998.