Markgildi:epsilon-delta skilgreiningin dulbúin sem nálgun upp á tiltekinn aukastaf

Sagt er að fall $y = f(x)$ hafi *markgildið* A þegar x stefnir á x_0 (x nálgast x_0) ef fallgildin $f(x)$ eru nálægt stærðinni A þegar x er nálægt x_0, skrifað

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Hugmyndin er sú að fá megi $f(x)$ eins nálægt A og óskað er með því að velja x nógu nálægt x_0.

SKILGREINING A. *Fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ er til önnur tala $\delta > 0$ þannig að*

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \textit{ef} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Við segjum að a nálgi b að k-ta aukastaf ef það sem eftir stendur, þegar allir aukastafir á eftir þeim k-ta hafa verið skornir af í báðum, er eins.

Skoðum til dæmis töluna

$$b = \sqrt{2} = 1,414213562 \cdots$$

Hér nálgar 1,4333 töluna b að fyrsta aukastaf og 1,41421301 nálgar b að sjötta aukastaf.

Í því tilfelli að síðasti aukastafur eftir niðurskurð er 9, þá hækkum við upp, áður en tölurnar eru bornar saman.

Tökum sem dæmi tölurnar

$$b_1 = 2 \text{ og } a_1 = 1,992,$$

$$b_2 = 0,11304 \text{ og } a_2 = 0,112993,$$

$$b_3 = 1,199 \text{ og } a_3 = 1,200.$$

Í þessum tilfellum segjum við að a_1 nálgi b_1 að öðrum aukastaf, að a_2 nálgi b_2 að fjórða aukastaf og að a_3 nálgi b_3 að þriðja aukastaf .

Að $f(x)$ stefni á tölu A þegar x stefnir á x_0 á þýðir að við getum látið $f(x)$ nálga A að hvaða aukastaf sem okkur dettur í hug, með því að láta x nálga x_0 með nægilega mörgum aukastöfum.

SKILGREINING B. *Við segjum að $f(x)$ hafi markgildið A þegar x stefnir á x_0, skrifað*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

ef til er runa $n_1, n_2, n_3, \ldots$ af jákvæðum heiltölum þannig að $f(x)$ nálgar A að k-ta aukastaf ef x nálgar x_0 að n_k-ta aukastaf (gera má ráð fyrir að heiltölurunan sé hægt vaxandi, $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots$).

REIKNIREGLUR

Ýmsar reiknireglur um markgildi má leiða út með aukastafanálgun:

i) *Ef* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ *og* $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ *og* c *er tala þá er* $\lim_{x\to x_0}(c \cdot f(x) + g(x)) = \cdot A + B$.

ii) *Ef* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ *þá er* $\lim_{x\to x_0} f^2(x) = A^2$.

Með því að skrifa $f^2(x) - A^2 = (f(x) - A)(f(x) + A)$ fæst svo reglan,

iii) *Ef* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ *og* $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ *þá er* $\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$.

Samanburður á ϵ-δ lýsingu og aukastafalýsingu.

Við sjáum að a nálgar b að k-ta aukastaf hefur því í för með sér að $|a - b| \leq 10^{-k}$. Og ef $|a - b| < 10^{k+1}$ þá nálgar a töluna b að k-ta aukastaf.

Notum þetta til að bera saman lýsingarnar tvær á markgildi.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

(i) ef fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ er til önnur tala $\delta > 0$ þannig að

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \textit{ef} \quad |x - x_0| < \delta.$$

(ii) ef til er runa $n_1, n_2, n_3, \ldots$ af jákvæðum heiltölum þannig að $f(x)$ nálgar A að k-ta aukastaf ef x nálgar x_0 að n_k-ta aukastaf.