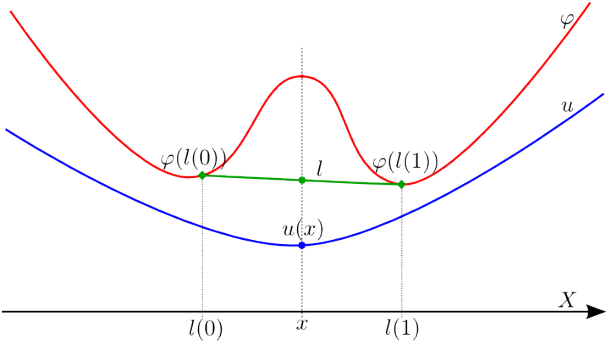
Skífuformúlur í tvinnfallagreiningu

Benedikt Steinar Magnússon

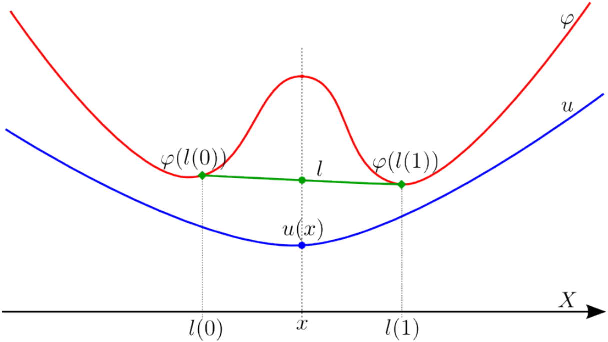
Raunvísindastofnun
Háskóli Íslands
http://www.hi.is/∼bsm

Stærðfræði á Íslandi 2011
Reykholti, Borgarfirði

Stærsta kúpta fallið sem er yfirgnæft af φ



Stærsta kúpta fallið sem er yfirgnæft af φ



Sjáum að

$$\sup\{u(x); u \text{ kúpt}, u \leq \varphi\} \leq \inf_l\{\alpha\,\varphi(l(1)) + (1-\alpha)\varphi(l(0))\},$$

þar sem infimum er tekið yfir öll línustrik $l : [0,1] \to X$ þannig að til er $\alpha \in [0,1]$ með $x = \alpha\, l(1) + (1-\alpha)\, l(0)$.

Jafnaðarmerki

Það er ekki mjög erfitt að sýna að þetta er í raun jafnaðarmerki

Jafnaðarmerki

Það er ekki mjög erfitt að sýna að þetta er í raun jafnaðarmerki

$$\sup\{u(x); u \text{ kúpt}, u \leq \varphi\} = \inf_{l}\{\alpha\,\varphi(l(1)) + (1-\alpha)\varphi(l(0))\}$$

Jafnaðarmerki

Það er ekki mjög erfitt að sýna að þetta er í raun jafnaðarmerki

$$\sup\{u(x); u \text{ kúpt}, u \leq \varphi\} = \inf_{I}\{\alpha\,\varphi(I(1)) + (1-\alpha)\varphi(I(0))\} =: \hat{\varphi}(x),$$

Jafnaðarmerki

Það er ekki mjög erfitt að sýna að þetta er í raun jafnaðarmerki

$$\sup\{u(x);\, u \text{ kúpt}, u \leq \varphi\} = \inf_{I}\{\alpha\,\varphi(I(1)) + (1-\alpha)\varphi(I(0))\} =: \hat{\varphi}(x),$$

Til þess að sýna það þá nægir að sanna að

- $\hat{\varphi} \leq \varphi$

Jafnaðarmerki

Það er ekki mjög erfitt að sýna að þetta er í raun jafnaðarmerki

$$\sup\{u(x); u \text{ kúpt}, u \leq \varphi\} = \inf_I\{\alpha\,\varphi(I(1)) + (1-\alpha)\varphi(I(0))\} =: \hat{\varphi}(x),$$

Til þess að sýna það þá nægir að sanna að

- $\hat{\varphi} \leq \varphi$
- $\hat{\varphi}$ sé kúpt

Jafnaðarmerki

Það er ekki mjög erfitt að sýna að þetta er í raun jafnaðarmerki

$$\sup\{u(x); u \text{ kúpt}, u \le \varphi\} = \inf_{l}\{\alpha\,\varphi(l(1)) + (1-\alpha)\varphi(l(0))\} =: \hat{\varphi}(x),$$

Til þess að sýna það þá nægir að sanna að

- $\hat{\varphi} \le \varphi$
- $\hat{\varphi}$ sé kúpt

þá er $\hat{\varphi}$ í fjölskyldunni vinstra megin og við höfum jafnaðarmerki.

Skipt yfir í tvinnfallagreiningu

Tilsvarandi vandamál í tvinnfallagreiningu felst í því að finna stærsta fjölundirþýða fallið sem er yfirgnæft af gefnu falli φ.

Skipt yfir í tvinnfallagreiningu

Tilsvarandi vandamál í tvinnfallagreiningu felst í því að finna stærsta fjölundirþýða fallið sem er yfirgnæft af gefnu falli φ. Fallið φ er þá skilgreint á mengi X sem er opið mengi í $\mathbb{C}^n$, eða almennar tvinnvíðátta.

- Í stað kúptra falla koma fjölundirþýð föll ($\mathcal{PSH}$),

Skipt yfir í tvinnfallagreiningu

Tilsvarandi vandamál í tvinnfallagreiningu felst í því að finna stærsta fjölundirþýða fallið sem er yfirgnæft af gefnu falli φ. Fallið φ er þá skilgreint á mengi X sem er opið mengi í $\mathbb{C}^n$, eða almennar tvinnvíðátta.

- Í stað kúptra falla koma fjölundirþýð föll ($\mathcal{PSH}$), og
- í stað línustrika koma lokaðar fágaðar skífur.

Poisson skífufellið

Rifjum upp að fjölundirþýð föll uppfylla undirmeðalgildiseiginleika með tilliti til fágaðara skífa.

Poisson skífufellið

Rifjum upp að fjölundirþýð föll uppfylla undirmeðalgildiseiginleika með tilliti til fágaðara skífa. Þ.e. ef u er fjölundirþýtt fall og f fáguð skífa þá er

$$u(f(0)) \leq \int_{\mathbb{T}} u \circ f \, d\sigma,$$

Poisson skífufellið

Rifjum upp að fjölundirþýð föll uppfylla undirmeðalgildiseiginleika með tilliti til fágaðara skífa. Þ.e. ef u er fjölundirþýtt fall og f fáguð skífa þá er

$$u(f(0)) \leq \int_{\mathbb{T}} u \circ f \, d\sigma,$$

þar sem σ er bogmálið á einingarhringnum $\mathbb{T}$ staðlað sem 1.

Poisson skífufellið

Rifjum upp að fjölundirþýð föll uppfylla undirmeðalgildiseiginleika með tilliti til fágaðara skífa. Þ.e. ef u er fjölundirþýtt fall og f fáguð skífa þá er

$$u(f(0)) \leq \int_{\mathbb{T}} u \circ f \, d\sigma,$$

þar sem σ er bogmálið á einingarhringnum $\mathbb{T}$ staðlað sem 1. Ef jafnframt gildir að $u \leq \varphi$, þá fáum við að

$$u(f(0)) \leq \int_{\mathbb{T}} \varphi \circ f \, d\sigma.$$

Poisson skífufellið

Rifjum upp að fjölundirþýð föll uppfylla undirmeðalgildiseiginleika með tilliti til fágaðara skífa. Þ.e. ef u er fjölundirþýtt fall og f fáguð skífa þá er

$$u(f(0)) \leq \int_{\mathbb{T}} u \circ f \, d\sigma,$$

þar sem σ er bogmálið á einingarhringnum $\mathbb{T}$ staðlað sem 1. Ef jafnframt gildir að $u \leq \varphi$, þá fáum við að

$$u(f(0)) \leq \int_{\mathbb{T}} \varphi \circ f \, d\sigma.$$

Með því að taka sup yfir u vinstra megin og inf yfir skífurnar f hægra megin þá fæst

$$\sup\{u(x); u \in \mathcal{PSH}(X), u \leq \varphi\} \leq \inf\left\{\int_{\mathbb{T}} \varphi \circ f \, d\sigma; f \in \mathcal{A}_X, f(0) = x\right\},$$

þar sem $\mathcal{A}_X$ er mengi allra lokaðara fágaðra skífa í X.

Poisson skífuformúlan

Setning [Poletsky, Sigurðsson og Lárusson, Rosay]:

Ef X er tvinnvíðátta og φ er fall á X sem er hálfsamfellt að ofan þá er

$$\sup\{u(x); u \in \mathcal{PSH}(X), u \le \varphi\} = \inf\left\{ \int_{\mathbb{T}} \varphi \circ f \, d\sigma; f \in \mathcal{A}_X, f(0) = x \right\}$$

Poisson skífuformúlan

Setning [Poletsky, Sigurðsson og Lárusson, Rosay]:
Ef X er tvinnvíðátta og φ er fall á X sem er hálfsamfellt að ofan þá er

$$\sup\{u(x); u \in \mathcal{PSH}(X), u \leq \varphi\} = \inf\left\{\int_{\mathbb{T}} \varphi \circ f \, d\sigma; f \in \mathcal{A}_X, f(0) = x\right\}$$

Til upprifjunar, í $\mathbb{R}$ var formúlan eftirfarandi

$$\sup\{u(x); u \text{ kúpt}, u \leq \varphi\} = \inf_l\{\alpha\,\varphi(l(1)) + (1-\alpha)\varphi(l(0))\}.$$

Þjappaðar víðáttur

Vandamálið

Á hring eru engin kúpt föll nema fastaföllin.

Þjappaðar víðáttur

Vandamálið

Á hring eru engin kúpt föll nema fastaföllin.

Lausnin

Leyfum föllunum að vera eilítið hvelfd ($u'' \geq -\omega$)

Þjappaðar víðáttur

Vandamálið

Á hring eru engin kúpt föll nema fastaföllin.

Lausnin

Leyfum föllunum að vera eilítið hvelfd ($u'' \geq -\omega$) eða við leyfum þeim að vera „hvelfd í ákveðnum punktum".

Þjappaðar víðáttur

Vandamálið

Á hring eru engin kúpt föll nema fastaföllin.

Lausnin

Leyfum föllunum að vera eilítið hvelfd ($u'' \geq -\omega$) eða við leyfum þeim að vera „hvelfd í ákveðnum punktum”.

Við lendum í svipuðum vandræðum með fjölundirþýðu föllin.

Þjappaðar víðáttur

Vandamálið

Á hring eru engin kúpt föll nema fastaföllin.

Lausnin

Leyfum föllunum að vera eilítið hvelfd ($u'' \geq -\omega$) eða við leyfum þeim að vera „hvelfd í ákveðnum punktum”.

Við lendum í svipuðum vandræðum með fjölundirþýðu föllin.

Vandamálið

Ef X er þjöppuð víðátta þá eru einu fjölundirþýðu föllin á X fastaföllin.

Þjappaðar víðáttur

Vandamálið

Á hring eru engin kúpt föll nema fastaföllin.

Lausnin

Leyfum föllunum að vera eilítið hvelfd ($u'' \geq -\omega$) eða við leyfum þeim að vera „hvelfd í ákveðnum punktum".

Við lendum í svipuðum vandræðum með fjölundirþýðu föllin.

Vandamálið

Ef X er þjöppuð víðátta þá eru einu fjölundirþýðu föllin á X fastaföllin.

Lausnin

Hálffjölundirþýð föll.

Hálffjölundirþýð föll

Látum ω vera jákvæðan lokaðan $(1,1)$ straum á X,

Hálffjölundirþýð föll

Látum ω vera jákvæðan lokaðan $(1,1)$ straum á X, þ.e. $\omega = \sum_{i,j} \omega_{i,j} dz_i \wedge d\bar{z}_j$.

Hálffjölundirþýð föll

Látum ω vera jákvæðan lokaðan $(1,1)$ straum á X, þ.e. $\omega = \sum_{i,j} \omega_{i,j} dz_i \wedge d\bar{z}_j$.
Þetta jafngildir því að staðbundið er hægt að skrifa

$$\omega = dd^c \psi,$$

þar sem ψ er fjölundirþýtt fall.

Hálffjölundirþýð föll

Látum ω vera jákvæðan lokaðan $(1,1)$ straum á X, þ.e. $\omega = \sum_{i,j} \omega_{i,j} dz_i \wedge d\bar{z}_j$.

Þetta jafngildir því að staðbundið er hægt að skrifa

$$\omega = dd^c\psi,$$

þar sem ψ er fjölundirþýtt fall.

Fallið ψ kallast þá *staðbundið mætti fyrir* ω.

Hálffjölundirþýð föll

Látum ω vera jákvæðan lokaðan $(1,1)$ straum á X, þ.e. $\omega = \sum_{i,j} \omega_{i,j} dz_i \wedge d\bar{z}_j$.
Þetta jafngildir því að staðbundið er hægt að skrifa

$$\omega = dd^c \psi,$$

þar sem ψ er fjölundirþýtt fall.
Fallið ψ kallast þá *staðbundið mætti fyrir* ω.

Skilgreining

Segjum að fall u á X sé ω-fjölundirþýtt, eða hálffjölundirþýtt, ef

$$u + \psi$$

er fjölundirþýtt fyrir öll staðbundin mætti ψ fyrir ω.

Hálffjölundirþýð föll

Látum ω vera jákvæðan lokaðan $(1,1)$ straum á X, þ.e. $\omega = \sum_{i,j} \omega_{i,j} dz_i \wedge d\bar{z}_j$.
Þetta jafngildir því að staðbundið er hægt að skrifa

$$\omega = dd^c\psi,$$

þar sem ψ er fjölundirþýtt fall.
Fallið ψ kallast þá *staðbundið mætti fyrir* ω.

Skilgreining

Segjum að fall u á X sé ω-fjölundirþýtt, eða hálffjölundirþýtt, ef

$$u + \psi$$

er fjölundirþýtt fyrir öll staðbundin mætti ψ fyrir ω.

Þetta jafngildir því að (í veikum skilningi)

$$dd^c u \geq -\omega.$$

Hálffjölundirþýð föll

Látum ω vera jákvæðan lokaðan $(1,1)$ straum á X, þ.e. $\omega = \sum_{i,j} \omega_{i,j} dz_i \wedge d\bar{z}_j$.
Þetta jafngildir því að staðbundið er hægt að skrifa

$$\omega = dd^c \psi,$$

þar sem ψ er fjölundirþýtt fall.
Fallið ψ kallast þá *staðbundið mætti fyrir* ω.

Skilgreining

Segjum að fall u á X sé ω-fjölundirþýtt, eða hálffjölundirþýtt, ef

$$u + \psi$$

er fjölundirþýtt fyrir öll staðbundin mætti ψ fyrir ω.

Þetta jafngildir því að (í veikum skilningi)

$$dd^c u \geq -\omega.$$

Táknum ω-fjölundirþýð föll á X með $\mathcal{PSH}(X, \omega)$.

ω útgáfa af Poisson skífuformúlunni

Við viljum nú finna formúlu fyrir stærsta ω-fjölundirþýða fallið sem er yfirgnæft af gefnu falli φ.

ω útgáfa af Poisson skífuformúlunni

Við viljum nú finna formúlu fyrir stærsta ω-fjölundirþýða fallið sem er yfirgnæft af gefnu falli φ.

Rifjum upp Poisson skífuformúluna

$$\sup\{u(x); u \in \mathcal{PSH}(X), u \leq \varphi\} = \inf\left\{ \int_{\mathbb{T}} \varphi \circ f \, d\sigma; f \in \mathcal{A}_X, f(0) = x \right\}$$

ω útgáfa af Poisson skífuformúlunni

Við viljum nú finna formúlu fyrir stærsta ω-fjölundirþýða fallið sem er yfirgnæft af gefnu falli φ.

Rifjum upp Poisson skífuformúluna

$$\sup\{u(x); u \in \mathcal{PSH}(X), u \leq \varphi\} = \inf\left\{\int_{\mathbb{T}} \varphi \circ f \, d\sigma; f \in \mathcal{A}_X, f(0) = x\right\}$$

Það er augljóst hvernig við komum ω að vinstra megin,

$$\sup\{u(x); u \in \mathcal{PSH}(X, \omega), u \leq \varphi\} = \inf\left\{?\,; f \in \mathcal{A}_X, f(0) = x\right\},$$

ω útgáfa af Poisson skífuformúlunni

Við viljum nú finna formúlu fyrir stærsta ω-fjölundirþýða fallið sem er yfirgnæft af gefnu falli φ.

Rifjum upp Poisson skífuformúluna

$$\sup\{u(x); u \in \mathcal{PSH}(X), u \leq \varphi\} = \inf\left\{ \int_{\mathbb{T}} \varphi \circ f \, d\sigma; f \in \mathcal{A}_X, f(0) = x \right\}$$

Það er augljóst hvernig við komum ω að vinstra megin,

$$\sup\{u(x); u \in \mathcal{PSH}(X, \omega), u \leq \varphi\} = \inf\left\{ ?\, ; f \in \mathcal{A}_X, f(0) = x \right\},$$

spurningin er hvernig við gerum það hægra megin.

Tengsl ω við $\mathcal{A}_X$

Skilgreining

Ef $f \in \mathcal{A}_X$ þá skilgreinum við *formynd (e. pullback) af* ω *með* f, táknað $f^*\omega$, staðbundið með $\Delta(\psi \circ f)$.

Tengsl ω við $\mathcal{A}_X$

Skilgreining

Ef $f \in \mathcal{A}_X$ þá skilgreinum við *formynd (e. pullback) af* ω *með* f, táknað $f^*\omega$, staðbundið með $\Delta(\psi \circ f)$.

Látum $R_{f^*\omega}(t) = \int_{\mathbb{D}} \log \left| \frac{t-s}{1-t\bar{s}} \right| f^*\omega(s)$ vera Riesz mættið fyrir $f^*\omega$.

Hjálparsetning

Fyrir ω-hálfsamfellt fall að ofan u þá er eftirfarandi jafngilt

- $u \in \mathcal{PSH}(X, \omega)$
- $u \circ f + R_{f^*\omega}$ er undirþýtt fyrir öll $f \in \mathcal{A}_X$

Tengsl ω við $\mathcal{A}_X$ framh.

Ef $u \in \mathcal{PSH}(X, \omega)$, $u \leq \varphi$ og $f \in \mathcal{A}_X$, $f(0) = x$ þá er

Tengsl ω við $\mathcal{A}_X$ framh.

Ef $u \in \mathcal{PSH}(X, \omega)$, $u \leq \varphi$ og $f \in \mathcal{A}_X$, $f(0) = x$ þá er

$$u(f(0)) + R_{f^*\omega}(0)$$

Tengsl ω við $\mathcal{A}_X$ framh.

Ef $u \in \mathcal{PSH}(X, \omega)$, $u \leq \varphi$ og $f \in \mathcal{A}_X$, $f(0) = x$ þá er

$$u(f(0)) + R_{f^*\omega}(0) \leq \int_{\mathbb{T}} u \circ f \, d\sigma + \int_{\mathbb{T}} R_{f^*\omega} \, d\sigma.$$

Tengsl ω við $\mathcal{A}_X$ framh.

Ef $u \in \mathcal{PSH}(X,\omega)$, $u \leq \varphi$ og $f \in \mathcal{A}_X$, $f(0) = x$ þá er

$$u(f(0)) + R_{f^*\omega}(0) \leq \int_{\mathbb{T}} u \circ f \, d\sigma + \int_{\mathbb{T}} R_{f^*\omega} \, d\sigma.$$

Það er

$$u(x) \leq -R_{f^*\omega}(0) + \int_{\mathbb{T}} \varphi \circ f \, d\sigma.$$

Tengsl ω við $\mathcal{A}_X$ framh.

Ef $u \in \mathcal{PSH}(X,\omega)$, $u \le \varphi$ og $f \in \mathcal{A}_X$, $f(0) = x$ þá er

$$u(f(0)) + R_{f^*\omega}(0) \le \int_{\mathbb{T}} u \circ f \, d\sigma + \int_{\mathbb{T}} R_{f^*\omega} \, d\sigma.$$

Það er

$$u(x) \le -R_{f^*\omega}(0) + \int_{\mathbb{T}} \varphi \circ f \, d\sigma.$$

Með því að taka supremum yfir u, and infimum yfir f þá fæst

$$\begin{aligned} &\sup\{u(x); u \in \mathcal{PSH}(X,\omega), u \le \varphi\} \\ &\qquad \le \inf\{-R_{f^*\omega}(0) + \int_{\mathbb{T}} \varphi \circ f \, d\sigma; f \in \mathcal{A}_X, f(0) = x\}. \end{aligned}$$

Niðurstaðan

Setning:

Látum X vera tvinnvíðáttu, $\omega = \omega_1 - \omega_2$ vera mismuninn á tveim lokuðum jákvæðum $(1,1)$-straumum á X, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ vera mismuninn á ω_1-hálfsemfelldu falli að ofan φ_1 og fjölundirþýðu falli φ_2. Þá er fallið $\sup\{u \in \mathcal{PSH}(X,\omega); u \leq \varphi\}$ ω-fjölundirþýtt og fyrir sérhvert $x \in X \setminus \operatorname{sing}(\omega)$,

$$\begin{aligned}\sup\{u(x); u \in \mathcal{PSH}(X,\omega), u \leq \varphi\} \\ = \inf\{-R_{f^*\omega}(0) + \int_{\mathbb{T}} \varphi \circ f \, d\sigma; f \in \mathcal{A}_X, f(0) = x\}.\end{aligned}$$

Niðurstaðan

Setning:

Látum X vera tvinnvíðáttu, $\omega = \omega_1 - \omega_2$ vera mismuninn á tveim lokuðum jákvæðum $(1,1)$-straumum á X, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ vera mismuninn á ω_1-hálfsemfelldu falli að ofan φ_1 og fjölundirþýðu falli φ_2. Þá er fallið $\sup\{u \in \mathcal{PSH}(X,\omega); u \le \varphi\}$ ω-fjölundirþýtt og fyrir sérhvert $x \in X \setminus \operatorname{sing}(\omega)$,

$$\sup\{u(x); u \in \mathcal{PSH}(X,\omega), u \le \varphi\}$$
$$= \inf\{-R_{f^*\omega}(0) + \int_{\mathbb{T}} \varphi \circ f \, d\sigma; f \in \mathcal{A}_X, f(0) = x\}.$$